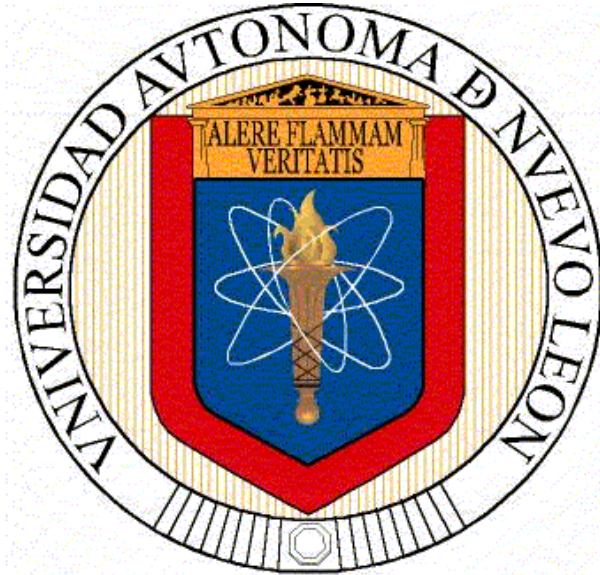


**Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**



TESIS

**SOLUCIÓN A PROBLEMAS DE CONTROL
ÓPTIMO SINGULAR A TRAVÉS DE MODOS DESLIZANTES DE
ALTO ORDEN**

PRESENTA

EFRAÍN IBARRA JIMÉNEZ

**PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA
INDUSTRIAL**

ENERO DE 2015

**Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
División de Estudios de Posgrado**



TESIS

**SOLUCIÓN A PROBLEMAS DE CONTROL
ÓPTIMO SINGULAR A TRAVÉS DE MODOS DESLIZANTES DE
ALTO ORDEN**

PRESENTA

EFRAÍN IBARRA JIMÉNEZ

**PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA
INDUSTRIAL**

**DIRECTOR DE TESIS
DR. MANUEL JIMÉNEZ LIZARRAGA**

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

Enero de 2015

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

División de Estudios de Postgrado

Doctorado en Ingeniería Física Industrial

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis con el nombre ***Solución a problemas de control óptimo singular a través de modos deslizantes de alto orden*** realizada por el alumno Efraín Ibarra Jiménez con número de matrícula 1576929 sea aceptada como opción a obtener el grado de **Doctor en Ingeniería Física Industrial**.

Comité de Tesis

Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizarraga
Presidente/Asesor

Dr. Marco Iván Ramirez Sosa Morán
1er. Vocal/Revisor

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
2do. Vocal/Revisor

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
3er. Vocal/Revisor

Dr. Miguel Hernández González
4to. Vocal/Revisor

Dr. Romeo Selvas Aguilar
Sub -Director de División de Estudios de Postgrado

San Nicolas de los Garza N.L. a Enero de 2015

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. MOTIVACIÓN	1
1.2. ANTECEDENTES	2
1.3. APORTACIONES	2
1.3.1. ESTABILIZACIÓN SINGULAR ÓPTIMA POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS INVARIANTES EN TIEMPO.	2
1.3.2. OPTIMIZACIÓN SINGULAR POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS VARIANTES EN EL TIEMPO	3
1.4. APLICACIONES	3
1.5. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	4
2. MARCO TEÓRICO	5
2.1. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES	5
2.1.1. Introducción a la teoría de control por modos deslizantes	5
2.2. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN	32
2.3. CONTROL ÓPTIMO	35
2.4. TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN	36
2.5. PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO SINGULAR	39
2.5.1. Control Óptimo Singular en Sistemas Lineales mimo	42
2.6. REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO	60
3. ESTABILIZACIÓN SINGULAR ÓPTIMA POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS INVARIANTES EN EL TIEMPO.	62
3.1. INTRODUCCIÓN	62
3.2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA	65
3.3. TRANSFORMACIÓN DEL SISTEMA E ÍNDICE DE SINGULARIDAD	65
3.4. ORDEN DE SINGULARIDAD DEL PESO	66
3.5. MDAO DISEÑO DE LA SUPERFICIE	67
3.6. DISEÑO DEL CONTROL	69
3.7. CONCLUSIÓN	74

4. OPTIMIZACIÓN SINGULAR POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS VARIANTES EN TIEMPO	75
4.1. INTRODUCCIÓN	75
4.2. CASO GENERAL	78
4.3. OPTIMIZACIÓN SINGULAR DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS LINEALES VARIANTES EN TIEMPO.	78
4.4. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO	84
4.5. EJEMPLO NUMÉRICO	85
4.6. CONTROLABILIDAD DEL DESCENSO DE UN COHETE ESPACIAL SOBRE LA SUPERFICIE LUNAR	92
4.7. CONCLUSIÓN	101
5. UN ALGORITMO DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA ESTABILIZAR EL VEHÍCULO CUADRICÓPTERO CON VALIDACIÓN EXPERIMENTAL	102
5.1. RESUMEN	102
5.2. INTRODUCCIÓN	102
5.3. ENUNCIADO DEL PROBLEMA	103
5.4. ESQUEMA DEL CONTROL	104
5.5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN	107
5.6. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL	111
5.7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	112
6. CONTROL DEL HOVERCRAFT	113
6.1. INTRODUCCIÓN	113
6.2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA	113
7. CONCLUSIÓN Y TRABAJO FUTURO	123
7.1. CONCLUSIÓN	123
7.2. TRABAJO FUTURO	123
7.3. ARTÍCULOS	123
7.4. CONFERENCIAS	123

Dedicatoria

Dedico este trabajo de tesis doctoral a mi padre y madre, que a lo largo de todos estos años de estudio doctoral, me brindaron su apoyo incondicional, por lo que no podré pagarles todo el sacrificio y dedicación que han mostrado tener hacia mí, esperando algún día poderles demostrar mi total admiración y afecto que tengo hacia ellos.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia y a todas aquellas personas que de alguna forma me han brindado su ayuda y apoyo educativo, tal es el caso de mi asesor, el Doctor Manuel Jiménez Lizarraga. También se agradece a todos mis sinodales quienes aceptaron participar en mi examen de grado, y por ofrecerme sus comentarios y críticas que fueron de utilidad para mejorar el escrito de la tesis doctoral. También mi muy sincero agradecimiento al Conacyt por la beca que me otorgó durante mis estudios de doctorado, que fue de gran utilidad para mi sustento, esperando en un futuro inmediato pueda seguir brindándome su apoyo económico para mis futuros proyectos.

Resumen

La idea de este trabajo de tesis está motivada por el libro [73], en él se muestra que implementando el enfoque de optimización de costos singulares, pueden diseñarse superficies deslizantes de primer orden, donde la finalidad de esta metodología es el diseñar la superficie deslizante adecuada que proveerá de estabilidad a sistemas lineales, tanto invariantes como variantes en el tiempo.

Con el propósito de obtener el diseño adecuado de superficies deslizantes que provean de estabilidad a sistemas lineales (Invariantes y Variantes en tiempo) se realiza una extensión a superficies de alto orden, motivo por lo que nuevamente se considera el enfoque de optimización, pero en esta ocasión a costos de mayor generalidad. Por tanto las superficies deslizantes que se obtienen al tomar en cuenta la metodología de optimización, serán de alto orden, donde el orden lo define el número de veces que hay que derivar la superficie deslizante para que por vez primera aparezca la variable de control u , por lo que dependiendo del orden de las superficies deslizantes es que se implementará el uso de los denominados controladores quasicontínuos de alto orden descritos en [48]. Se muestra en [45] que estos tipos de controladores son robustos ante incertidumbres y perturbaciones acotadas. Además del diseño de superficies deslizantes, se propondrá una variable deslizante auxiliar que será definida como la *superficie deslizante integral de alto orden*, que tiene la peculiaridad de definir un tiempo de convergencia t_1 para la superficie deslizante de alto orden, donde las implicaciones que se generarán al poder establecer el tiempo de convergencia serán vistas en detalle en el transcurso del desarrollo de la tesis.

Dicho lo anterior con el propósito de resolver problemas de ***Optimización de Costos Singulares*** en ***Sistemas Lineales***. El principal objetivo será el de desarrollar la metodología de diseño de una ***Superficie Deslizante Integral de Alto Orden*** (SDIAO) Levant and Alelishvili [49] .

Los sistemas lineales que se toman en consideración para su optimización son:

a) *Sistema Lineal Invariante en Tiempo*

b) *Sistema Lineal Variante en Tiempo*

De tal manera que para el diseño de la (SDIAO) para resolver el problema de estabilización singular óptima del inciso a y b se recurrirá a la minimización de una *funcional cuadrática singular con horizonte de tiempo infinito y finito respectivamente*.

La descripción anterior solo proporciona una idea pobre de la obtención de la (SDIAO) de tal manera que se proporcionará un algoritmo muy detallado de cómo realizar el diseño de tales superficies, así como la de establecer el orden del controlador correspondiente a cada superficie deslizante.

Además de la parte teórica de esta tesis, también se buscó aplicar los resultados teóricos en aplicaciones de tiempo real, entre las aplicaciones que se pueden mencionar está la estabilización del vehículo cuadricóptero, que consistió en llevar el ángulo yaw del cuadricóptero a una referencia deseada, esto fue hecho con la implementación de un control súper twisting,

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. MOTIVACIÓN

Este trabajo de tesis se motiva en la resolución de problemas de optimización singular, donde se consideran estabilizar *plantas lineales invariantes en el tiempo así como variantes en el tiempo*. En la literatura de control los modelos invariantes en el tiempo pueden encontrarse en aplicaciones tales como economía, seguimiento de trayectorias, aeronáutica (por ejemplo en vehículos aéreos no tripulados “cuadricóptero visto en capítulo 5”), y los modelos variantes en el tiempo pueden obtenerse mediante la linealización alrededor de trayectorias que contienen parámetros que varían en el tiempo, tal es el caso del modelo que describe el alunizaje de un cohete espacial (visto en capítulo 4). Por tal motivo surge la intención de implementar nuevos algoritmos de control con la finalidad de resolver problemas de optimización singular. Es decir cuando no se puede dar una solución completa al problema de optimización al aplicar de forma directa el **Principio del Máximo de Pontryagin**, o algunas veces para dar solución es necesario recurrir a otras consideraciones, como derivar a H_u con respecto al tiempo repetidamente hasta que la variable de control u vuelva aparecer de forma explícita.

Por tanto en esta tesis se desarrollan algoritmos de control que se fundamentan en la teoría de control por modos deslizantes junto con el enfoque de optimización.

En la teoría de los modos deslizantes se sabe que el diseño adecuado de la superficie deslizante es fundamental para dar solución a problemas de estabilización. Entre las técnicas existentes para el diseño de superficies deslizantes, se pueden mencionar:

- Por asignación de polos
- Mediante problemas de optimización (Problema del regulador lineal cuadrático)

De esta última técnica se origina la idea de diseñar las denominadas superficies deslizantes de alto orden, donde en el libro de Utkin [73] se muestra cómo utilizar el enfoque de optimización para resolver problemas de estabilización singular óptima, obteniendo un diseño de la superficie deslizante, que es denominada de primer orden debido a que es obtenida al considerar la minimización de un costo cuadrático singular, esto es mediante la resolución del problema del regulador lineal cuadrático. Así que de manera similar las superficies deslizantes de alto orden se diseñan tomando en cuenta el enfoque de optimización, mediante la minimización de costos cuadráticos singulares, ya sean costos con horizonte de tiempo infinito o finito. Este diseño será posible al resolver el problema del regulador lineal cuadrático, donde la minimización de la funcional de costo será garantizada al implementarse alguno de los controladores quasicontínuos de alto orden descritos en [48] de tal manera que la minimización es llevada a cabo una vez que este tipo de controles lleven a la superficie deslizante de alto orden previamente diseñada a la superficie deslizante óptima, y posteriormente es mantenida de ahí en adelante. Además con el propósito de realizar la estabilización de los sistemas con mayor rapidez se introduce una nueva superficie deslizante auxiliar llamada la superficie deslizante integral, de tal manera que se logrará que el modo deslizante de alto orden converja a su superficie deslizante óptima en un tiempo prescrito *tan pequeño como se quiera*, logrando así que el sistema comience a tomar soluciones estables cuando el modo deslizante de alto orden converja a su superficie deslizante óptima.

1.2. ANTECEDENTES

A través de la historia conforme el mundo comenzó a industrializarse y con el crecimiento sostenido de la población surge la necesidad de crear y controlar Robots (Máquinas) que puedan manufacturar un producto o construir otras máquinas mediante el ensamblaje de sus partes, como por ejemplo automóviles, aviones, computadoras, etc. Pero esta labor tiene que ser controlada de forma automatizada y llevada a cabo de forma eficiente y sin contratiempos, para no afectar la productividad o generar pérdidas económicas, por tal motivo surge la necesidad de desarrollar teoría de control moderna que pueda ser utilizada por ingenieros, científicos, economistas, etc. Al día de hoy se ha convertido en un campo de investigación muy demandante. Entre la teoría de control moderno puede mencionarse el control óptimo, que en la práctica es muy utilizado en disciplinas tales como economía e ingeniería, esta teoría es de gran utilidad en resolver problemas que pudieran estar sujetos a restricciones donde en aplicaciones al campo aeroespacial puede mencionarse el alunizaje de un cohete restringido a minimizar el consumo de combustible, como reseña histórica la teoría de control óptimo moderno tiene su comienzo en el trabajo pionero de hombres tales como Holmann en Europa y Goddard en los estados Unidos, estos hombres, y otros como ellos, soñaron que los viajes espaciales algún día se harían realidad, éste es el trabajo de estos pioneros quienes ayudaron hacer sus sueños realidad en un breve periodo de tiempo. Los problemas de optimización para las dinámicas en espacio aéreo tales como consumo mínimo de combustible y de tiempo mínimo fueron realizados rápidamente al proponerse como problemas de calculo de variaciones. A finales de la segunda guerra mundial los problemas en el buen desempeño de misiles balísticos llegaron a ser de gran importancia, donde maximizar el rango de alcance de un misil con cierta cantidad de combustible y minimizar el tiempo de impacto, se convirtieron en problemas típicos de optimización. La mayoría de la teoría matemática fue desarrollada tempranamente en el siglo veinte por el profesor G.A. Bliss y sus estudiantes de la universidad de Chicago. En particular, la optimización de trayectorias de misiles y vuelos de vehículos espaciales para las cuales los controles son finitos y acotados fueron analizados por una técnica descrita en una disertación por F. A. Valentine, un estudiante de investigación de Bliss, en 1937. Sin embargo, en 1959 L. S. Pontryagin presentó su principio del máximo el cual consolida la teoría para problemas con restricción.

1.3. APORTACIONES

1.3.1. ESTABILIZACIÓN SINGULAR ÓPTIMA POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS INVARIANTES EN TIEMPO.

En el capítulo 3 con el propósito de estabilizar plantas lineales invariantes en el tiempo con incertidumbres acopladas y acotadas, se presenta un algoritmo que consiste en el enfoque de optimización, es decir mediante la minimización de un costo cuadrático singular (con horizonte de tiempo infinito). Este algoritmo se puede describir de forma abreviada como sigue: se encuentra una matriz T no-singular tal que la planta original sea transformada a una planta que esté en la forma canónica controlable, así como al costo singular cuadrático original se le aplica la transformación T para obtener un nuevo costo singular cuadrático, además de utilizar la sustitución de utkin para eliminar los términos cruzados en el nuevo costo. Este algoritmo también describe de forma detallada el diseño del modo deslizante integral de alto orden, donde se puede decir sin profundizar en el tema, que el diseño se obtiene en tres pasos principales:

PASO 1. Diseñar la superficie deslizante de alto orden S_i a partir de la minimización del nuevo costo cuadrático singular (en horizonte de tiempo infinito), mediante la solución de la ecuación matricial de Riccati.

PASO 2. Introducir un polinomio transitorio μ_i dependiente del orden del modo deslizante, donde μ_i será el encargado de definir el tiempo que deseamos que la superficie deslizante de alto orden S_i converja a su superficie deslizante óptima $S_i(t_1) = \mu_i(t_1) = 0$, de tal manera que t_1 define el tiempo prescrito deseado.

PASO 3. Finalmente la superficie deslizante integral de alto orden se definirá como una superficie auxiliar \sum_i la cual es la diferencia entre la superficie deslizante de alto orden S_i y el polinomio transitorio μ_i , es decir $\sum_i = S_i - \mu_i$.

1.3.2. OPTIMIZACIÓN SINGULAR POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS VARIANTES EN EL TIEMPO

En el capítulo 4 con el propósito de estabilizar plantas lineales variantes en el tiempo con incertidumbres acopladas y acotadas, se describe un algoritmo basado en el enfoque de optimización, es decir mediante la minimización de un costo cuadrático singular (con horizonte de tiempo finito). Este algoritmo se puede describir de manera abreviada como sigue: primeramente de la planta original variante en el tiempo se busca una transformación no-singular $T(t)$ que lleve la planta original a una planta en forma canónica de fase variable (con parámetros variantes en tiempo), esto mediante el procedimiento descrito en [63], a continuación usando la matriz $T(t)$ para transformar el costo cuadrático singular con matriz $Q(t) \geq 0$ a un nuevo costo cuadrático singular con una matriz dada por $(T^{-1})^T Q(t) T^{-1}$. Además este algoritmo describe de forma detallada el diseño del modo deslizante integral de alto orden, donde se puede decir sin entrar en detalles, que el diseño se obtiene en tres pasos principales:

PASO 1. Diseñar la superficie deslizante de alto orden S_i a partir de la minimización del nuevo costo cuadrático singular (en horizonte de tiempo finito), mediante la solución analítica o numérica de la ecuación diferencial matricial de Riccati. Además con la finalidad de facilitar el trabajo computacional de obtener la solución numérica de la ecuación diferencial de Riccati, se propone una estructura para $\tilde{Q}(t)$ que es de gran utilidad para que en el costo cuadrático singular no aparezcan términos cruzados.

PASO 2. Introducir un polinomio transitorio μ_i dependiente del orden del modo deslizante, donde μ_i será el encargado de definir el tiempo que deseamos que el modo deslizante de alto orden S_i converja a su variedad deslizante óptima $S_i(t_1) = \mu_i(t_1) = 0$, de tal manera que t_1 define el tiempo prescrito deseado.

PASO 3. Finalmente la superficie deslizante integral de alto orden se definirá como una superficie auxiliar \sum_i la cual es la diferencia entre la superficie deslizante de alto orden S_i y el polinomio transitorio μ_i , es decir $\sum_i = S_i - \mu_i$.

Además de la descripción de este algoritmo, este es aplicado para controlar el descenso, la velocidad y la quema de combustible de un cohete espacial que desciende sobre la superficie lunar, todo esto mediante la linealización del modelo del cohete alrededor de una trayectoria variante en el tiempo, donde los resultados de simulación mostrarán el comportamiento del cohete al momento de aproximarse a la trayectoria solución deseada.

1.4. APLICACIONES

1. UN ALGORITMO DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA ESTABILIZAR EL VEHÍCULO CUADRICÓPTERO CON VALIDACIÓN EXPERIMENTAL:

En el capítulo 5 se aplica la metodología de los modos deslizantes, en donde se implementa un control super-twisting para controlar el ángulo yaw ψ del vehículo cuadricóptero en tiempo real, donde las simulaciones y los resultados experimentales son mostrados en las figuras que les corresponden mostradas en el capítulo 5, además de esto se implementó la metodología desarrollada del trabajo de tesis doctoral, es decir se utilizó el enfoque de optimización de costos cuadráticos singulares para controlar las dinámicas laterales y longitudinales $y - \phi$ del vehículo cuadricóptero, donde puede decirse que gracias a esta metodología es que se diseña una superficie deslizante σ de tercer orden, que garantizará la estabilidad de estas dinámicas una vez que la superficie deslizante σ alcance la superficie deslizante óptima $\sigma = 0$, esto fue posible porque se propone utilizar un controlador quasicontinuo de tercer orden descrito en ([48]), garantizando que σ colapse hacia su superficie deslizante óptima $\sigma = 0$, así como sus derivadas consecutivas $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$, mostrando los resultados de simulación de la estabilización de estas dinámicas de estado, donde en un trabajo

futuro este control quasicontinuo de tercer orden es pensado a implementarse en tiempo real, y así poder estabilizar las dinámicas laterales y longitudinales.

2. CONTROL DEL HOVERCRAFT:

El aerodeslizador o hovercraft es un vehículo acuático que se desliza sobre la superficie del agua, este vehículo consiste de 3 grados de libertad y tiene solo 2 entradas de control, está compuesto por dos ventiladores que producen una cierta fuerza y un torque. En el capítulo 7 se implementa un controlador super-twisting para estabilizar el ángulo yaw ψ y la posición del Hovercraft, esto mediante un nuevo diseño de la superficie deslizante el cual está descrito en este capítulo 6. además se presentan las simulaciones del ángulo yaw ψ así como las simulaciones que describen la posición del hovercraft representada por (z_1, z_2) .

1.5. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

En el capítulo 2 se muestra la teoría de control utilizada para el desarrollo de esta tesis, esta teoría consiste principalmente en control por modos deslizantes y control óptimo, en el capítulo 3 se resuelven problemas de estabilización singular óptima diseñando superficies deslizantes de alto orden mediante la minimización de un funcional de costo cuadrático singular con horizonte de tiempo infinito y la utilización de controladores quasicontinuos de alto orden descritos en [48], en capítulo 4 se resuelven problemas de estabilización singular óptima para sistemas variantes en el tiempo, mediante el diseño de superficies deslizantes de alto orden por medio de la minimización de un funcional de costo singular cuadrático con horizonte de tiempo finito y la utilización de los controladores quasicontinuos de alto orden [48], en el capítulo 5 se utiliza un controlador súper twisting para la estabilización del ángulo yaw ψ de un vehículo cuadricóptero, posteriormente se muestran los resultados de simulación así como los resultados experimentales, también se utiliza un controlador quasicontinuo de tercer orden para la estabilización de las dinámicas longitudinales y laterales $y - \phi$, mostrando para estas dinámicas solo los resultados de simulación, pensando que a futuro se pueda implementar este tipo de controlador en tiempo real, en el capítulo 6 para el modelo del hovercraft o aerodeslizador se diseña un controlador súper twisting para estabilizar el ángulo yaw donde la posición del hovercraft es representada mediante las variables (z_1, z_2) .

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

2.1.1. Introducción a la teoría de control por modos deslizantes

Control por modos deslizantes, es una técnica de control robusto utilizada por ingenieros de control que desean dar estabilidad a sistemas de lazo cerrado, es decir esta técnica tiene dos objetivos, el de proveer las dinámicas deseadas para las variables de estado de algún sistema en particular, y la de compensar los (disturbios/incertidumbres) que pudieran llegar a presentarse en algún momento determinado en el sistema a controlar. Para lograr estos dos objetivos, los pasos a seguir son los siguientes:

1. *Diseño de una nueva variable σ , que será denominada “superficie deslizante”*, este diseño debe ser el adecuado para darle estabilidad a las soluciones de un sistema de lazo cerrado, es decir debe ser tal que cuando $\sigma \rightarrow 0$ las variables de estado del sistema empiecen a tomar soluciones estables, dichas soluciones pueden ser asintóticamente estables o estables en tiempo finito.
2. *Diseño del control por modos deslizantes u* , este diseño está basado principalmente en considerar alguna función de Lyapunov candidata que nos ayudará a diseñar el controlador necesario para lograr que la superficie deslizante σ converja a cero en tiempo finito t_r , donde este control será capaz de seguir manteniendo $\sigma = 0$ para todo $t > t_r$.

A continuación consideremos un bloque que está atado a un resorte como el presentado en la figura (2.1.1) donde x representa el desplazamiento de la masa a partir de la posición de equilibrio, la cual corresponde a la posición en la que el resorte no está siendo deformado. La ecuación que describe este movimiento, está dada por:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.1.1)$$

donde la ecuación (2.1.1) representa un sistema de ecuaciones diferenciales conservativo es decir su energía mecánica es constante lo que propiciará que el bloque no tenga pérdida de energía mecánica, lo que indica que el bloque comprimirá y estirará el resorte infinitamente sin detenerse jamás, pero sabemos que en la naturaleza siempre estamos propensos a fuerzas de fricción, por lo que la fuerza de fricción puede ser vista como un control que terminará por frenar el bloque en un tiempo determinado. Por consiguiente si el bloque se encuentra atado al resorte y éste experimenta una fuerza de fricción u , entonces tendremos que el bloque terminará por detenerse, donde la ecuación de movimiento que representa este hecho está dada por:

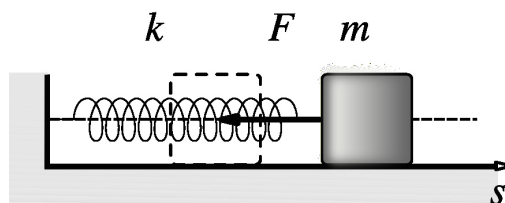


Figura 2.1.1: oscilador armónico

$$m\ddot{x} + kx = -u \quad (2.1.2)$$

donde u representa la fuerza de fricción que experimentará el bloque al desplazarse por el plano horizontal. Si definimos a $x_1 = x$, y $x_2 = \dot{x}_1$, entonces (2.1.2) puede escribirse como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{m}u - \frac{k}{m}x_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{matrix} \quad (2.1.3)$$

observemos que si queremos llevar el bloque a la posición de equilibrio ($x_1 = 0, x_2 = 0$) de forma asintótica, un buen candidato para estas dinámicas es la ecuación diferencial lineal homogénea invariante en tiempo:

$$\dot{x}_1 + cx_1 = 0, \quad c > 0 \quad (2.1.4)$$

teniendo en cuenta que $\dot{x}_1 = x_2$. Entonces la solución de ecuación. (2.1.4) y su derivada están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(0) \exp(-ct) \\ x_2 &= \dot{x}_1 = -cx_1(0) \exp(-ct) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

donde tenemos que x_1 y x_2 convergen a cero asintóticamente.

A continuación, como primer paso necesitamos un diseño adecuado para σ , donde el diseño conveniente de la variable σ estaría dado por la ecuación diferencial (2.1.4) ya que si $\sigma \rightarrow 0$ tendremos que las variables de estado del sistema (2.1.3) comenzarían a tener soluciones asintóticamente estables, entonces la variable σ que depende de las variables de estado del sistema (2.1.3) está dada por:

$$\sigma = \sigma(x_1, x_2) = x_2 + cx_1 \quad c > 0 \quad (2.1.6)$$

Si derivamos a σ con respecto al tiempo tendremos:

$$\dot{\sigma} = -\frac{1}{m}u - \frac{k}{m}x_1 + cx_2$$

donde observamos que la fuerza de fricción u aparece en $\dot{\sigma}$, posteriormente proponiendo que u toma la forma $u = m\rho \text{Sign}(\sigma) - kx_1 + mcx_2$ con $\rho > 0$ entonces:

$$\dot{\sigma} = -\rho \text{Sign}(\sigma)$$

Sin entrar en detalles específicos puede mostrarse que la variable $\sigma \rightarrow 0$ y además lo hace en tiempo finito. Notemos que aquí solo se ha propuesto a u sin dar detalles del porque será capaz de lograr que $\sigma \rightarrow 0$, los detalles de su diseño mediante una función candidata de Lyapunov $V(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2}$ será visto más adelante.

Ejemplo 1. Enseguida se mostrará el ejemplo cuando $u = 0$, es decir el caso conservativo, donde se realizará el diagrama fase para diferentes condiciones iniciales, así como la representación gráfica de alguna solución particular, tomando como condición inicial de posición y velocidad, $x_1(0) = 2$ y $x_2(0) = 0$ respectivamente. Entonces el sistema conservativo está dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{matrix} \quad (2.1.7)$$

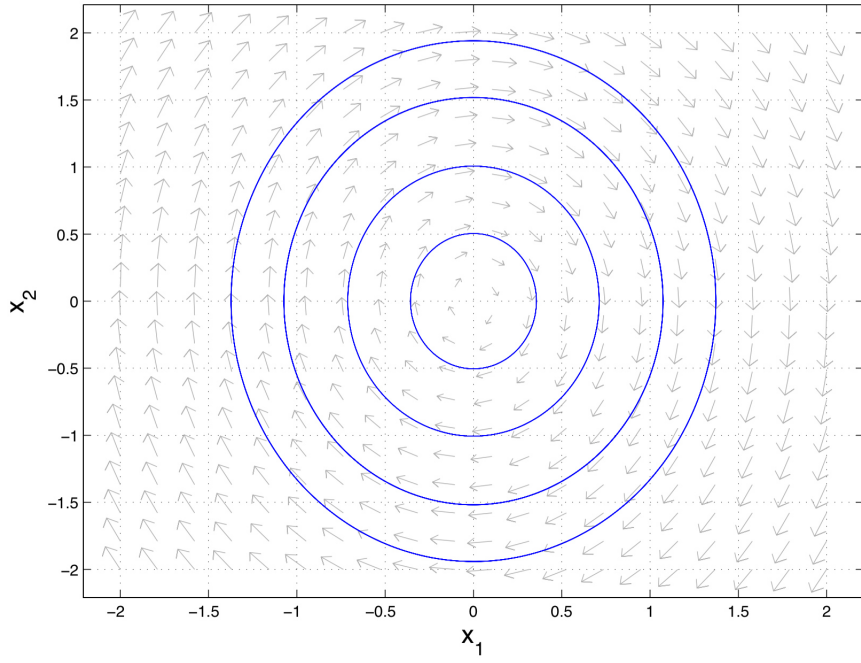


Figura 2.1.2: Diagrama fase (x_1, x_2)

Considerando una masa $m = 1$ y constante elástica $k = 2$, en la figura (2.1.2) se representa el diagrama fase de posición y velocidad (x_1, x_2) donde puede observarse que para diferentes condiciones iniciales se tienen órbitas concéntricas alrededor del punto de equilibrio $(0, 0)$, lo cual indica que el bloque se mantendrá oscilando de manera constante, comprimiendo y estirando el resorte indefinidamente, donde el bloque siempre alcanzará una amplitud máxima de estiramiento o compresión una vez que la velocidad x_2 sea igual a cero.

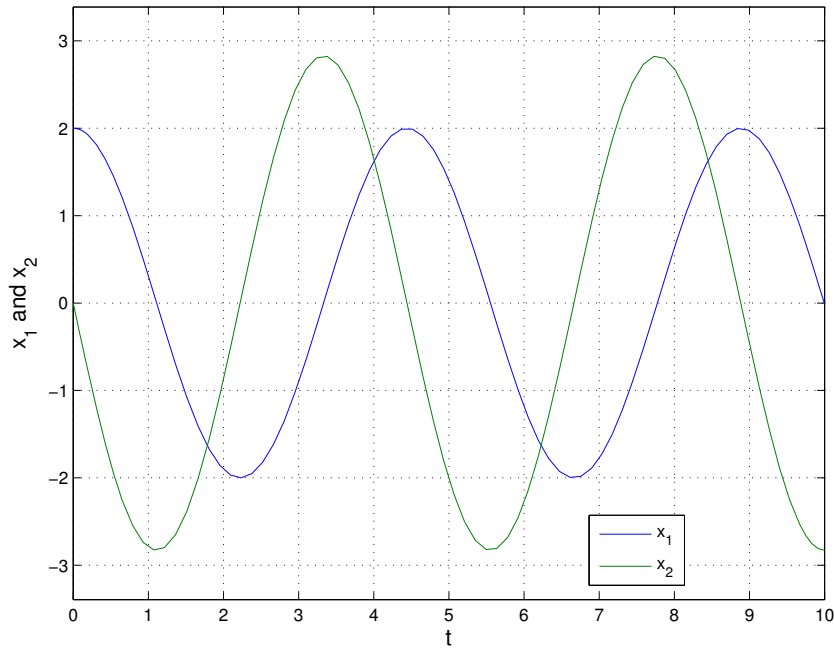


Figura 2.1.3: Dinámicas x_1 y x_2

En figura (2.1.3) están representadas las dinámicas de posición y velocidad x_1 y x_2 con condiciones iniciales $x_1(0) = 2$ y $x_2(0) = 0$.

Ejemplo 2. Enseguida se realizará el caso cuando la fuerza de fricción u está dada por $u = m\rho\text{Sign}(\sigma) - kx_1 + mcx_2$ con masa $m = 1$, con constante elástica $k = 2$ y $\rho = 6$, $c = 0.75$. Entonces el sistema (2.1.3) al sustituir la fuerza de fricción u estará dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = -\rho\text{Sign}(\sigma) - cx_2 & x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad (2.1.8)$$

donde se realizará un diagrama fase con diferentes condiciones iniciales, así como la representación gráfica de la solución particular con condiciones iniciales de posición y velocidad, $x_1(0) = 2$ y $x_2(0) = 0$ respectivamente, finalmente la representación gráfica del control u encargado de llevar el bloque al reposo.

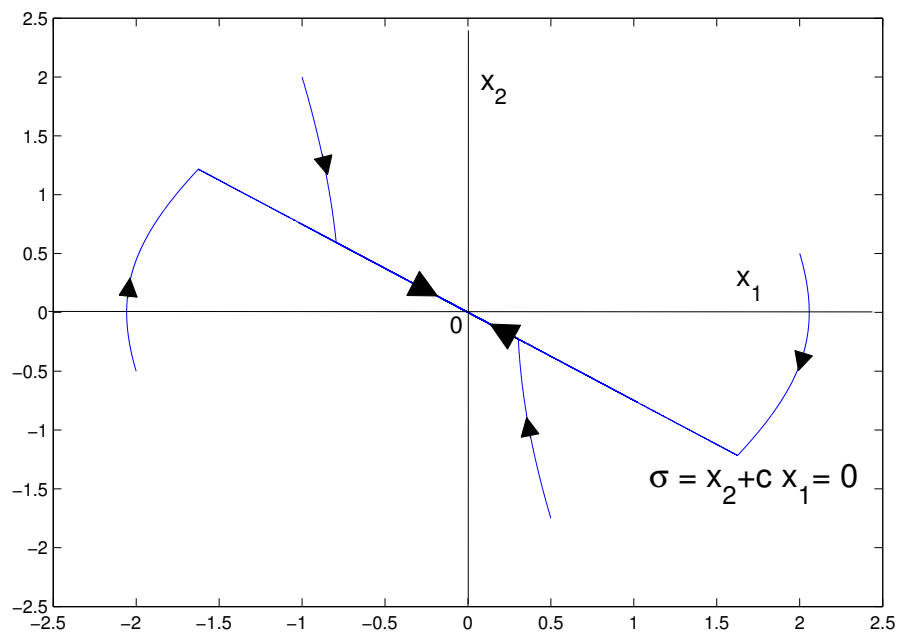


Figura 2.1.4: Diagrama fase (x_1, x_2)

En figura (2.1.4) vemos la representación gráfica del diagrama fase (x_1, x_2) con diferentes condiciones iniciales, donde observamos que el campo vectorial (x_1, x_2) se aproxima de forma asintótica al punto de equilibrio $(0,0)$, debido a que las soluciones asintóticas comienzan una vez que $\sigma = 0$.

Todo esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 1. *Modos Deslizantes y Superficie Deslizante* : al desplazamiento de las soluciones x_1 y x_2 que se mueven o deslizan sobre $\sigma = 0$, son los llamados *modos deslizantes*, y decimos que el modo deslizante ocurre una vez que $\sigma = 0$, y a la variable σ que depende de las variables de estado del sistema se le llama *superficie deslizante*.

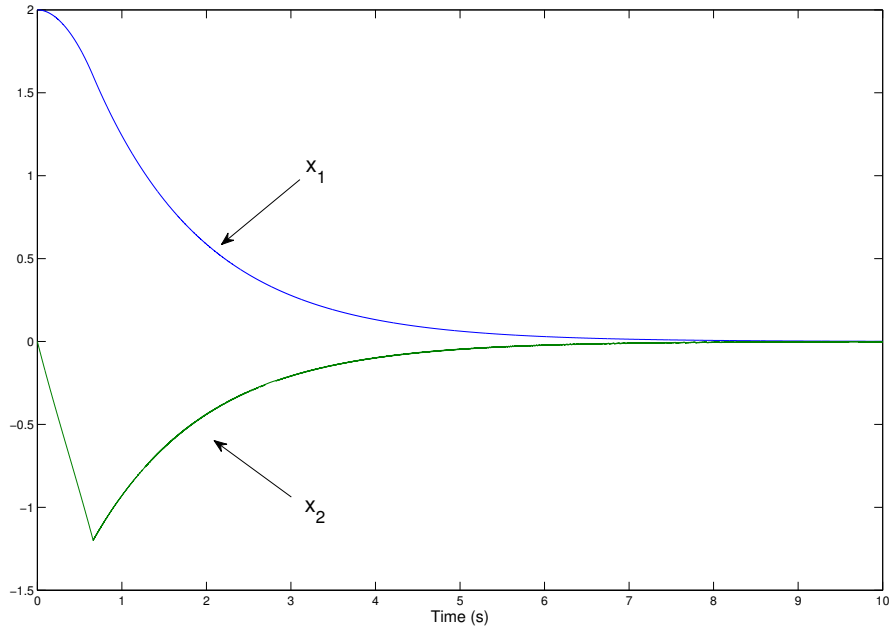


Figura 2.1.5: Dinámicas x_1, x_2 del sistema (2.1.8) con condiciones iniciales $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$

En figura (2.1.5) se tienen las gráficas de las dinámicas x_1 y x_2 donde puede observarse que el movimiento comienza cuando el bloque tiene estirado inicialmente el resorte una distancia $x_1(0) = 2$ a partir de la posición de equilibrio y con una velocidad inicial de $x_2(0) = 0$, donde se aprecia que el bloque regresa a la posición de equilibrio de forma asintótica.

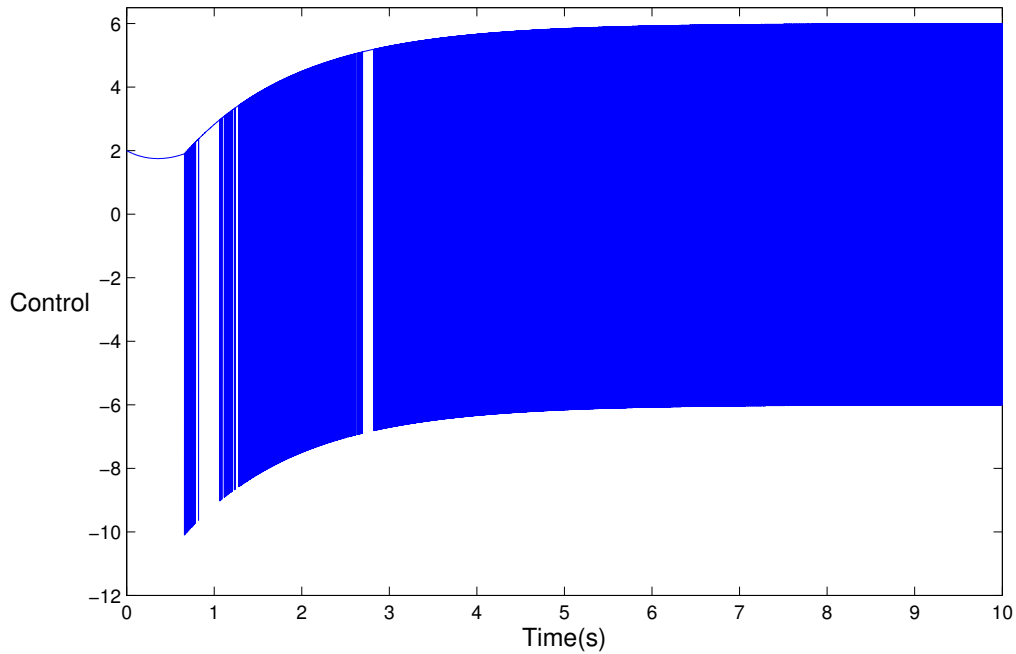


Figura 2.1.6: $u = 6 \text{Sign}(\sigma) - 2x_1 + 0.75x_2$

En figura (2.1.6) está la representación del control u , que en este caso u se considera una fuerza de fricción que se encargará de frenar el bloque hasta llevarlo al reposo.

Péndulo simple sin fricción ni fuerzas externas:

El Péndulo simple representado en la figura (2.1.7) consiste de un hilo de longitud l inextensible, donde en su extremo está atada una masa m , para encontrar la ecuación de movimiento del péndulo, observemos que tenemos tres fuerzas que actúan en el péndulo, estas fuerzas son: la fuerza de gravedad, la fuerza normal y la fuerza tangencial, las cuales están representadas al lado izquierdo del dibujo del Péndulo.

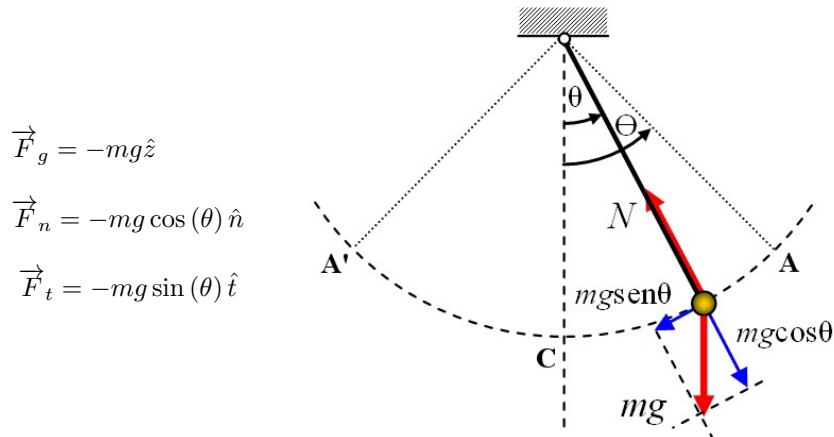


Figura 2.1.7: Péndulo Simple

Donde \hat{z} es el vector normal unitario a la superficie terrestre, \hat{n} y \hat{t} representan los vectores unitarios, normal y tangencial respectivamente que corresponden al desplazamiento de la masa m . Tenemos entonces que la fuerza tangencial \vec{F}_t es la única fuerza que contribuye al movimiento de la masa m , entonces podemos representar la fuerza tangencial como:

$$\vec{F}_t = ma_t \hat{t} = -mg \sin(\theta) \hat{t} \quad (2.1.9)$$

donde a_t representa la aceleración tangencial, pero recordemos que el desplazamiento de la masa m es descrito por la longitud de arco, la cual está dada por $s = l\theta$, y por consiguiente la magnitud de la velocidad y aceleración tangencial están dadas por:

$$\dot{s} = l\dot{\theta}$$

$$\ddot{s} = l\ddot{\theta}$$

entonces tenemos que la aceleración tangencial puede escribirse como:

$$a_t = \ddot{s} = l\ddot{\theta} \quad (2.1.10)$$

y al sustituir (2.1.10) en ecuación (2.1.9) tenemos que la ecuación del péndulo está dada por:

$$l\ddot{\theta} = -g \sin(\theta)$$

o bien

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (2.1.11)$$

Además tenemos que la ecuación de movimiento del péndulo (2.1.11) es conservativa, es decir su energía mecánica es constante, para ver esto recordemos que la energía es la suma de la energía potencial U con la energía cinética K :

$$E = U + K$$

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

donde $h = -l \cos(\theta)$ y $v^2 = \dot{s}^2 = l^2 \dot{\theta}^2$ entonces la energía total está dada por

$$E = -mgl \cos(\theta) + \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2$$

ahora si derivamos la energía total respecto al tiempo se tiene

$$\dot{E} = mgl \sin(\theta) \dot{\theta} + ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} \quad (2.1.12)$$

y tomando en cuenta de la ecuación del péndulo que $\sin(\theta) = -\frac{l\ddot{\theta}}{g}$, entonces al sustituir en (2.1.12) tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -ml^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0 \\ \Rightarrow E &= \text{Constante} \end{aligned}$$

lo cual significa que si el péndulo se suelta desde el reposo comenzando a oscilar desde un ángulo inicial $\theta(0)$, este oscilará indefinidamente sin detenerse con un ángulo máximo $\theta(0)$ a partir de la vertical, y si el péndulo fuera impulsado con una velocidad angular inicial $\dot{\theta}(0)$ lo suficientemente grande como para alcanzar a darle la vuelta, es decir que logre alcanzar un ángulo mayor a π , entonces el péndulo daría vueltas indefinidamente siempre regresando a su punto de partida con la misma velocidad en que inició su movimiento. Esto puede verse en un diagrama fase del péndulo simple que está representado en la figura (2.1.8). En este caso se considera que la longitud del hilo es $l = 3$, y la gravedad terrestre está dada por $g = 9.81$. Entonces la ecuación (2.1.11) puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo no lineal, donde se considera que la posición angular es $\theta = \theta_1$ y su velocidad angular $\dot{\theta}_1 = \theta_2$. Entonces este sistema de ecuaciones diferenciales no lineal es representado como:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 & \theta_1(0) = \theta_{10} \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{g}{l} \sin(\theta_1) & \theta_2(0) = \theta_{20} \end{cases} \quad (2.1.13)$$

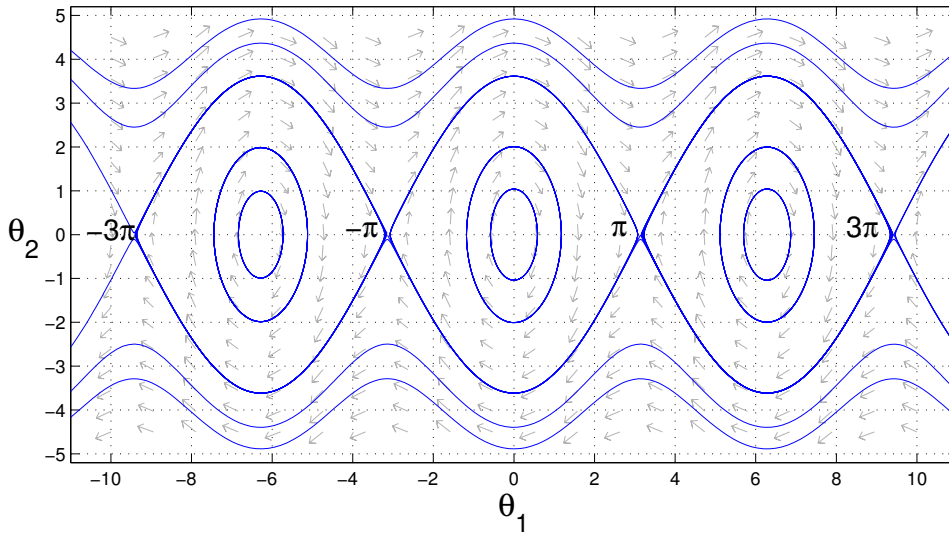


Figura 2.1.8: Diagrama fase (θ_1, θ_2) para el péndulo simple

La descripción de la ecuación de movimiento del péndulo simple es ideal, es decir en la vida real no es común tener sistemas conservativos, donde no exista pérdida de energía mecánica, debido a que siempre estamos propensos a fuerzas de fricción y perturbaciones externas, es entonces que si consideramos que en el péndulo existe fuerza de fricción en donde se sujeta el hilo, y además que puede estar sujeto a fuerzas externas $f(\theta, t)$ del tipo desconocidas que no tiendan a crecer indefinidamente, es decir perturbaciones consideradas acotadas $|f(\theta, t)| \leq L$, es entonces que la ecuación del péndulo al considerar este tipo de fuerzas se acercaría más a la realidad de nuestro mundo físico.

Péndulo sometido a fricción y fuerza externa

A continuación supongamos que el péndulo está sometido a una fuerza de fricción que afecta a la magnitud de la velocidad, donde puede estimarse que la magnitud de la fuerza de fricción es directamente proporcional a la magnitud de la velocidad. Puesto que solo afecta a la magnitud de la velocidad su dirección es tangencial y su sentido opuesto a la velocidad $\dot{\theta}$. Es decir:

$$\vec{F}_f = -b\dot{\theta}\hat{t}, \quad b > 0.$$

y si además consideramos que el péndulo está siendo afectado por una fuerza externa desconocida pero acotada en dirección tangencial, entonces por fines de simulación esta fuerza puede ser supuesta como una sinusoidal la cual se propone como:

$$\vec{F}_{ext} = F_0 \cos(\omega t) \hat{t}, \quad F_0 \in \mathbb{R}$$

Entonces la fuerza tangencial total \vec{F}_t estará dada por:

$$\vec{F}_t = ma_t \hat{t} = \left(-mg \sin(\theta) - b\dot{\theta} + F_0 \cos(\omega t) \right) \hat{t}$$

y acordándonos que $a_t = l\ddot{\theta}$ se tiene que la ecuación de movimiento del péndulo sometido a una fricción proporcional a la velocidad $\dot{\theta}$ y a una fuerza externa desconocida pero acotada, que con fines de simulación fue propuesta como $F_0 \cos(\omega t)$, con F_0 escalar y ω una frecuencia de oscilación, entonces se tendrá que la ecuación de movimiento estará dada por:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{b}{ml} \dot{\theta} + \frac{F_0}{ml} \cos(\omega t) \quad (2.1.14)$$

Donde (2.1.14) representa la ecuación del péndulo simple con fricción y fuerza externa, si se considera que $\theta = \theta_1$, $\dot{\theta}_1 = \theta_2$ entonces se puede escribir esta ecuación como, un sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 & \theta_1(0) = \theta_{10} \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{b}{ml} \theta_2 + \frac{F_0}{ml} \cos(\omega t) & \theta_2(0) = \theta_{20} \end{cases} \quad (2.1.15)$$

si en (2.1.15) consideramos que no hay fuerza externa, solamente está presente la fuerza de fricción que afecta la magnitud de la velocidad $\dot{\theta}$, entonces puede mostrarse mediante un diagrama fase (θ_1, θ_2) que la fuerza de fricción terminará por frenar el péndulo llevándolo al reposo, esto puede verse en el diagrama fase de la figura (2.1.9) donde se consideró que $l = 3$, $m = 1$, $b = 0.3$ y $F_0 = 0$.

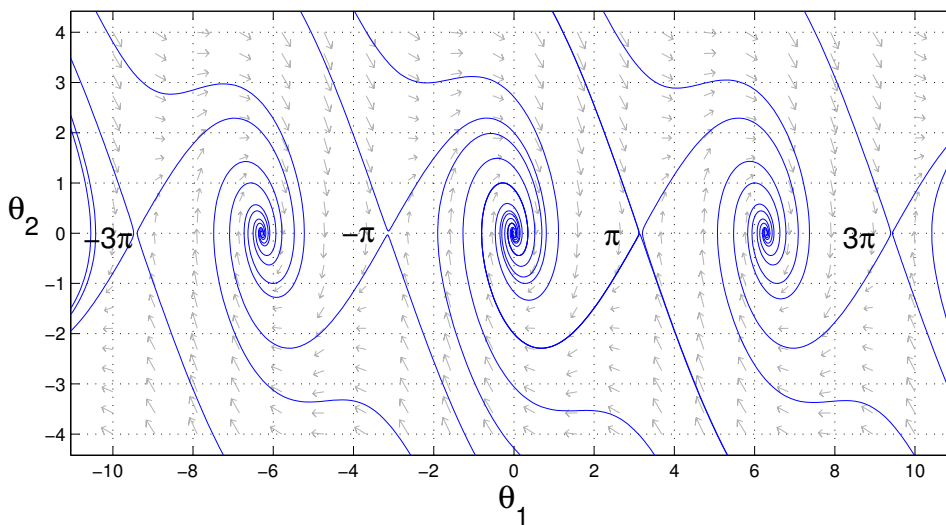


Figura 2.1.9: Diagrama fase (θ_1, θ_2) péndulo amortiguado

Estabilización del Péndulo sometido a fricción y fuerza externa

Supongamos ahora que deseamos diseñar una ley de control que nos provea la dinámica deseada para (2.1.15) en presencia de (disturbios/incertidumbres), por lo que se diseñará un controlador robusto por la técnica de los modos deslizantes. En esta ocasión se dirá de forma detallada como es que se diseña este tipo de control, donde anteriormente se mencionó que el primer paso es el diseño adecuado de la nueva variable σ la cual es llamada superficie deslizante, y como segundo paso es el diseño del control por modos deslizantes, al proponerse una función candidata de Lyapunov, pero nunca se mencionó como es esta propuesta y tampoco en que consiste el criterio de estabilidad de Lyapunov. Para dejar en claro todo lo anterior se propondrá un ejemplo de simulación, y conforme se vaya avanzando se va ir aclarando todos los pasos a seguir.

Ejemplo 3. Consideremos que deseamos que el *Péndulo sometido a fricción y fuerza externa* con ecuación de movimiento (2.1.15) tome las dinámicas del *péndulo simple* (2.1.13), esto con el fin de tener dinámicas del tipo conservativas, donde tengamos que el péndulo siempre alcance un ángulo máximo de oscilación. Por tanto tomemos en cuenta que se desea controlar a (2.1.15) entonces esta ecuación puede escribirse como:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 & \theta_1(0) = \theta_{10} \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{b}{ml} \theta_2 + \frac{F_0}{ml} \cos(\omega t) + u & \theta_2(0) = \theta_{20} \end{cases} \quad (2.1.16)$$

donde u es la variable de control que se encargará que (2.1.16) tome las dinámicas de un péndulo simple es decir:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{1r} = \theta_{2r} & \theta_{1r}(0) = \theta_{1r0} \\ \dot{\theta}_{2r} = -\frac{g}{l} \sin(\theta_{1r}) & \theta_{2r}(0) = \theta_{2r0} \end{cases} \quad (2.1.17)$$

donde θ_{1r} y θ_{2r} son dinámicas que deseamos alcanzar es decir $\theta_1 \rightarrow \theta_{1r}$ y $\theta_2 \rightarrow \theta_{2r}$. Entonces como primer paso para el diseño del control por modos deslizantes, es el diseño de la superficie deslizante σ , donde una forma adecuada que nos proporcionará estabilidad asintótica una vez que $\sigma \rightarrow 0$ estará dada por:

$$\sigma = (\theta_2 - \theta_{2r}) + c(\theta_1 - \theta_{1r}), \quad c > 0 \quad (2.1.18)$$

de esta manera cuando el control u logre hacer que $\sigma \rightarrow 0$ en un tiempo finito t_r y posteriormente siga manteniendo σ en cero para todo $t > t_r$ tendremos que $\theta_1 \rightarrow \theta_{1r}$ y $\theta_2 \rightarrow \theta_{2r}$ de forma asintótica. es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_1 = \theta_{1r}$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_2 = \theta_{2r}$.

Ahora si derivamos a (2.1.18) respecto al tiempo tendremos que:

$$\dot{\sigma} = -\frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{b}{ml} \theta_2 + \frac{F_0}{ml} \cos(\omega t) + \frac{g}{l} \sin(\theta_{1r}) + c(\theta_2 - \theta_{2r}) + u, \quad \sigma(0) = \sigma_0. \quad (2.1.19)$$

Para la dinámica de $\dot{\sigma}$ descrita en (2.1.19) una función de Lyapunov candidata $V(\sigma) > 0$ es introducida tomando la forma

$$V = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (2.1.20)$$

Donde el criterio de estabilidad de Lyapunov nos dice que si deseamos proveer de estabilidad asintótica global para (2.1.19) sobre el punto de equilibrio $\sigma = 0$, las siguientes condiciones deben ser satisfechas:

- (a) $\dot{V} < 0$ para $\sigma \neq 0$
- (b) $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$

La condición (b) es obviamente satisfecha por V en (2.1.20). Además en [67] para poder alcanzar convergencia en tiempo finito (estabilidad global en tiempo finito), la condición (a) puede ser modificada a ser

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2}, \quad \alpha > 0 \quad (2.1.21)$$

En efecto, separando variables e integrando desigualdad (2.1.21) sobre el intervalo de tiempo $0 \leq \tau \leq t$, obtenemos

$$V^{1/2}(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{1/2}(0) \quad (2.1.22)$$

Considerando que $V(t)$ alcanza el cero en tiempo finito t_r , entonces

$$\overbrace{V^{1/2}(t_r)}^0 \leq -\frac{1}{2}\alpha t_r + V^{1/2}(0).$$

Por tanto tendremos que t_r está acotado por

$$t_r \leq \frac{2V^{1/2}(0)}{\alpha}. \quad (2.1.23)$$

Observación 1. Notemos que cuando se logre hacer que $\dot{V} = -\alpha V^{1/2}$, entonces el tiempo de convergencia tomará su máximo posible, es decir que el tiempo de convergencia estará dado por:

$$t_r = \frac{2V^{1/2}(0)}{\alpha}$$

Por lo tanto, un control u propuesto que satisfaga a (2.1.21), llevará la variable σ a cero en tiempo finito y la mantendrá ahí para todo tiempo $t > t_r$.

Entonces tomando en consideración a (2.1.19) y derivando a V tenemos que:

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} = \sigma \left(-\frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{b}{ml} \theta_2 + \frac{F_0}{ml} \cos(\omega t) + \frac{g}{l} \sin(\theta_{1r}) + c(\theta_2 - \theta_{2r}) + u \right) \quad (2.1.24)$$

donde utilizando identidades trigonométricas tenemos que:

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} = \sigma \left(\frac{2g}{l} \cos\left(\frac{\theta_{1r} + \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{1r} - \theta_{2r}}{2}\right) - \frac{b}{ml} \theta_2 + \frac{F_0}{ml} \cos(\omega t) + c(\theta_2 - \theta_{2r}) + u \right)$$

Asumiendo $u = -c(\theta_2 - \theta_{2r}) + \frac{b}{ml} \theta_2 + v$ y sustituyendo en (2.1.24) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma \left(\frac{2g}{l} \cos\left(\frac{\theta_{1r} + \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{1r} - \theta_{2r}}{2}\right) + \frac{F_0}{ml} \cos(\omega t) + v \right) \\ &= \sigma \left[\frac{2g}{l} \cos\left(\frac{\theta_{1r} + \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{1r} - \theta_{2r}}{2}\right) \right] + \sigma \left[\frac{F_0}{ml} \cos(\omega t) \right] + \sigma v \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Seleccionando $v = -\rho \text{sign}(\sigma)$ donde

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.1.26)$$

$$\text{sign}(0) \in [-1, 1] \quad (2.1.27)$$

con $\rho > 0$ y sustituyendo en (2.1.25) obtenemos

$$\dot{V} \leq \frac{2g}{l} |\sigma| + \frac{F_0}{ml} |\sigma| - \rho |\sigma| = -|\sigma| \left(\rho - \frac{2g}{l} - \frac{F_0}{ml} \right) \quad (2.1.28)$$

Tomando en consideración a (2.1.20) junto con la condición modificada (2.1.21) la cual puede escribirse como

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma|, \quad \alpha > 0 \quad (2.1.29)$$

y combinando las ecuaciones (2.1.28) y (2.1.29) obtenemos que

$$\dot{V} \leq -|\sigma| \left(\rho - \frac{2g}{l} - \frac{F_0}{ml} \right) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma| \quad (2.1.30)$$

Finalmente la ganancia del control está dada por

$$\rho = \frac{2g}{l} + \frac{F_0}{ml} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad (2.1.31)$$

Consecuentemente se tiene que la ley de control u que lleva a la variable σ a cero en tiempo finito (2.1.23) es

$$u = -c(\theta_2 - \theta_{2r}) + \frac{b}{ml}\theta_2 - \rho \operatorname{sign}(\sigma) \quad (2.1.32)$$

Es obvio que en $\dot{\sigma}$ debe aparecer la variable de control u , esto es para poder diseñar el controlador que satisfaga la condición modificada (2.1.21), ésta observación debe ser tomada en cuenta mientras se diseña la superficie deslizante dada en (2.1.18).

El término $\frac{2g}{l}$ de la ganancia del control dada en (2.1.31) es necesaria para compensar la no linealidad $\frac{2g}{l} \cos\left(\frac{\theta_{1r} + \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{1r} - \theta_{2r}}{2}\right)$ y el término $\frac{F_0}{ml}$ es necesario para compensar el disturbio acotado o fuerza externa, que fue propuesta como $F_{ext} = \frac{F_0}{ml} \cos(\omega t)$, donde $|F_{ext}| \leq \frac{F_0}{ml}$, mientras que la segunda componente $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ es para lograr que la variable σ se vaya a cero en tiempo finito t_r dado por (2.1.23). Además observemos que para valores grandes de α producirá que σ tenga un tiempo de convergencia más corto.

También es importante notar que el control u solo servirá para hacer que $\sigma = 0$ en tiempo finito, pero si el diseño de σ no es el apropiado no garantizará que las variables de estado θ_1, θ_2 del sistema (2.1.16) convergen asintóticamente a θ_{1r} y θ_{2r} respectivamente. Por tal motivo cuando empezamos a tener sistemas con una dimensión mayor a 2, el diseño de la superficie se empieza a complicar, pero una forma muy útil de diseñar esta superficie es mediante el uso de la técnica de control óptimo, el cual será visto más adelante.

La condición (2.1.21) es también equivalente a

$$\sigma \dot{\sigma} \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma| \quad (2.1.33)$$

donde a menudo (2.1.33) es llamada la *condición de alcance*, y si conocemos que la condición (2.1.33) se cumple para un control u , entonces tendremos que $(\theta_1 - \theta_{1r})$ y $(\theta_2 - \theta_{2r})$ son llevadas hacia la superficie deslizante (2.1.18) y permanecerán sobre ésta de ahí en adelante.

Definición 2. El control $u(\theta_1, \theta_2)$ en (2.1.32) que lleva las variables $(\theta_1 - \theta_{1r})$ y $(\theta_2 - \theta_{2r})$ hacia la superficie deslizante (2.1.18) en tiempo finito t_r , y las mantiene sobre la superficie para todo $t \geq t_r$ en presencia del disturbio acotado $F_{ext}(\theta_1, \theta_2, t)$, es llamado *control por modos deslizantes* y un *modo deslizante ideal* se dice estar tomando lugar para todo $t \geq t_r$.

Ejemplo 4. Los resultados de simulación con una variable deslizante $\sigma = (\theta_2 - \theta_{2r}) + c(\theta_1 - \theta_{1r})$, $c > 0$ y una ley de control por modos deslizantes $u = -c(\theta_2 - \theta_{2r}) + \frac{b}{ml}\theta_2 - \rho \text{sign}(\sigma)$ donde las condiciones iniciales del péndulo perturbado (2.1.16) están dadas por $\theta_1(0) = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2(0) = -\frac{\pi}{4}$, y las condiciones iniciales de las dinámicas deseadas correspondientes al péndulo simple (2.1.17) están dadas por $\theta_{1r}(0) = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_{2r}(0) = 0$. Además un disturbio acotado $F_{ext}(\theta_1, \theta_2, t) = \frac{F_0}{ml} \cos(\omega t)$ (que representa la fuerza externa propuesta para nuestro propósito de simulación). Considerando que las constantes involucradas en este ejemplo están dadas por : $F_0 = 2$, $m = 1$, $l = 3$, $g = 9.81$, $b = 0.3$, $c = 0.6$, $\alpha = 0.5$, $\omega = 2$ y $\rho = \left(\frac{2g}{l} + \frac{F_0}{ml} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right)$. Mostramos a continuación los resultados de simulación en las figuras (2.1.10 – 2.1.14).

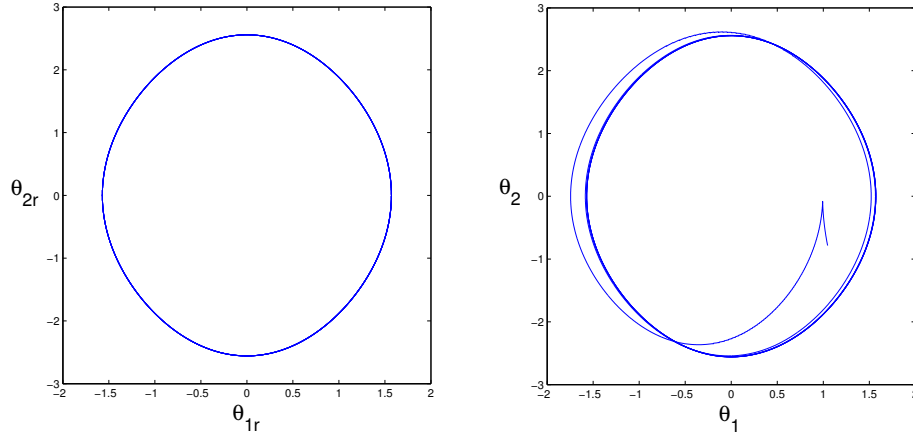


Figura 2.1.10: Diagramas fase $(\theta_{1r}, \theta_{2r})$ y (θ_1, θ_2)

En la parte izquierda de la figura (2.1.10) se muestra el diagrama fase $(\theta_{1r}, \theta_{2r})$ que corresponde al péndulo simple, y en la parte derecha se muestra el diagrama fase (θ_1, θ_2) correspondiente al péndulo sometido a rozamiento y fuerza externa, donde se observa que estas dinámicas se aproximan de forma asintótica a las dinámicas del péndulo simple, debido al buen diseño de la superficie deslizante σ y al diseño del control por modos deslizantes u , que es el encargado de hacer $\sigma \rightarrow 0$ en tiempo finito t_r y mantenerla en cero para todo $t \geq t_r$.

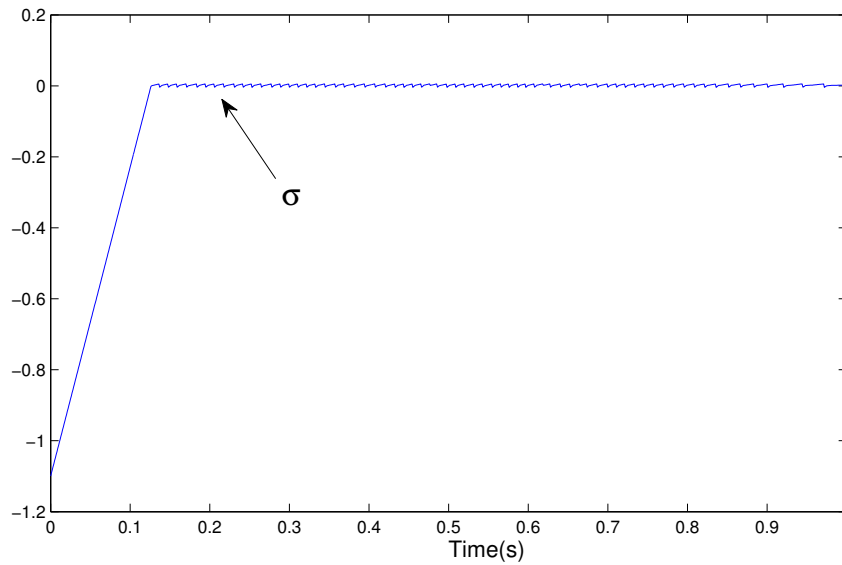


Figura 2.1.11: Superficie deslizante σ

En figura (2.1.11) observamos la convergencia de la superficie deslizante σ a cero en tiempo finito

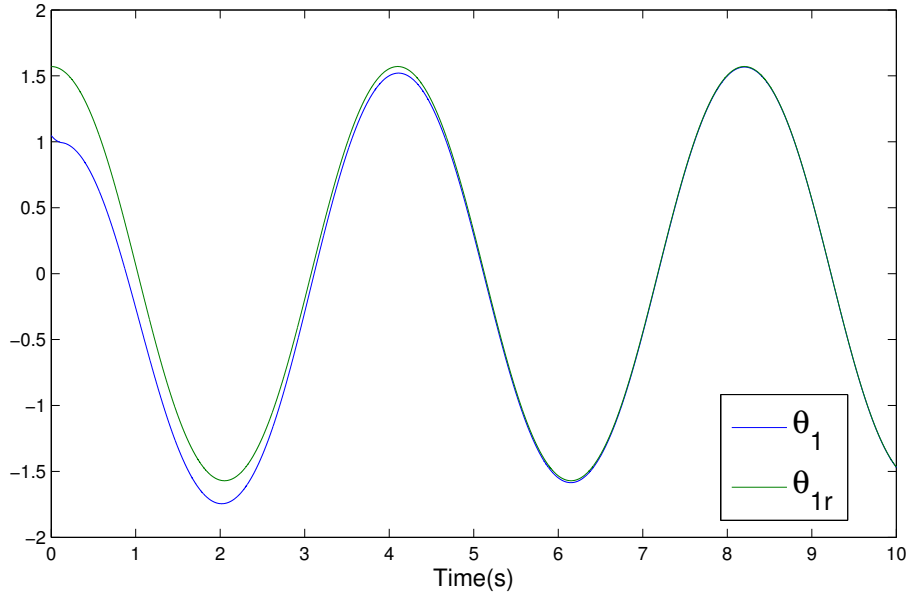


Figura 2.1.12: Dinámicas θ_1 y θ_{1r}

En figura (2.1.12) tenemos la dinámica de la posición angular θ_1 correspondiente al péndulo sometido a rozamiento y fuerza externa, convergiendo de forma asintótica a la dinámica deseada θ_{1r} la cual corresponde a la posición angular del péndulo simple.

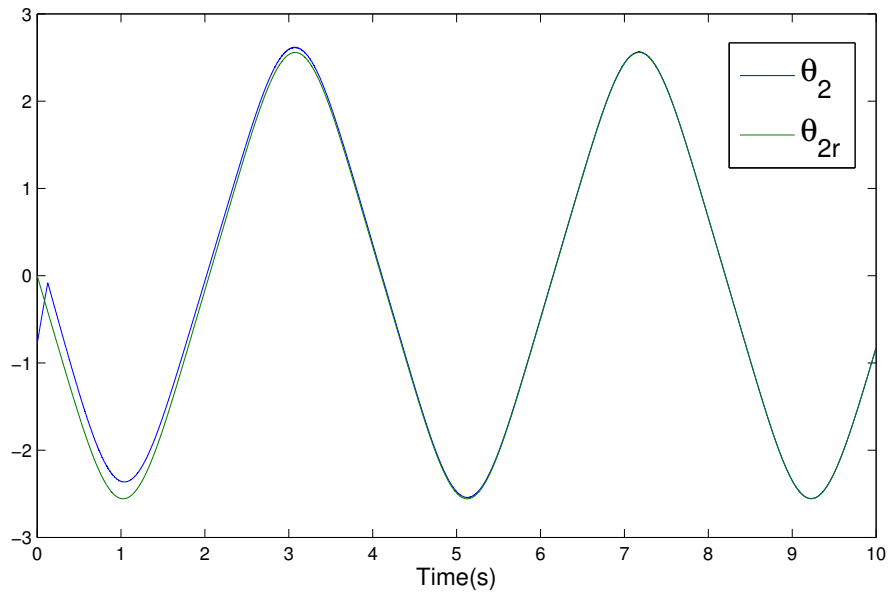


Figura 2.1.13: Dinámicas θ_2 y θ_{2r}

En figura (2.1.13) tenemos la dinámica de la velocidad angular θ_2 correspondiente al péndulo sometido a rozamiento y fuerza externa, convergiendo de forma asintótica a la dinámica deseada θ_{2r} la cual corresponde a la velocidad angular del péndulo simple.

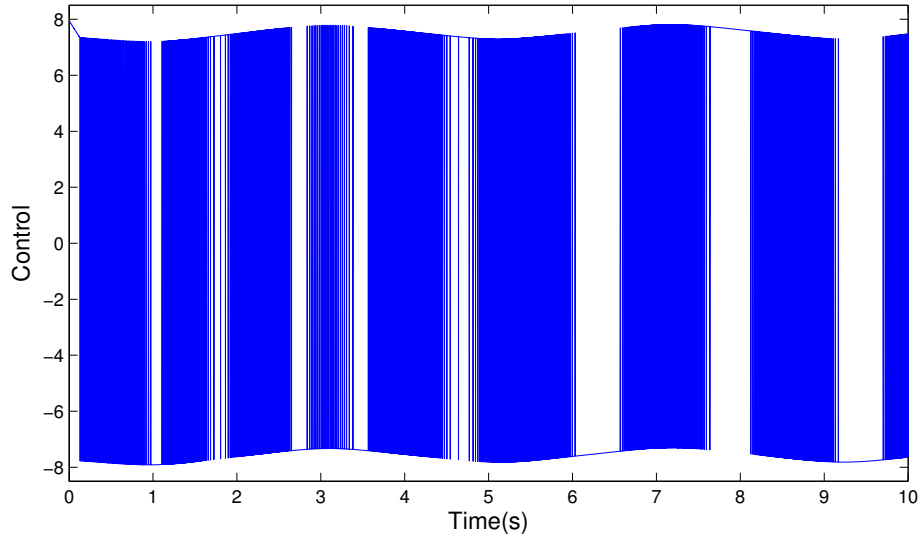


Figura 2.1.14: $u = -c(\theta_2 - \theta_{2r}) + \frac{b}{ml}\theta_2 - \rho \text{sign}(\sigma)$

En figura (2.1.14) está la representación gráfica del control por modos deslizantes u encargado de hacer que $\sigma \rightarrow 0$, en presencia de disturbios.

Observación 2. figura (2.1.14) vemos que el control por modos deslizantes produce una frecuencia de amplitud finita en forma de “zigzag” debido al efecto que produce el término $\text{sign}(\sigma)$ y a la naturaleza del tiempo discreto por la simulación en computadora. Este efecto es llamado *chattering*.

Grado Relativo

Definición 3. Consideremos un sistema dinámico SISO con una salida $y \in \mathbb{R}$, el vector de estado $x \in \mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n$, y un control de entrada $u \in \mathbb{R}$. Si $y^{(i)}$ es independiente de u para todo $i = 1, 2, \dots, k-1$, pero $y^{(k)}$ es proporcional a u con el coeficiente de proporcionalidad diferente de cero en un dominio razonable $\Omega \subset \mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n$, entonces k es llamado el grado relativo, ver [67].

Por ejemplo supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t) & x_2(0) = x_{20} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.1.34)$$

Entonces tenemos que el sistema (2.1.34) las dinámicas de entrada y salida tienen grado relativo $k = 2$ donde

$$y^{(2)} = u + f(y, \dot{y}, t) \quad (2.1.35)$$

Observación 3. El grado relativo del sistema en ecuación (2.1.34) es igual al orden del sistema.

Diseño del Controlador por Modo Deslizante Integral

Introducción:

En el control convencional por modos deslizantes, la robustez a variación de parámetros del sistema y perturbaciones externas solo puede ser lograda después de la aparición de los modos deslizantes. Dicho de otro modo, la robustez no es garantizada durante la *fase de alcance*, es decir: antes de que la superficie deslizante alcance el cero en algún tiempo finito t_r .

En consecuencia el control por modo deslizante integral busca eliminar la fase de alcance desde el comienzo, logrando así la compensación de las perturbaciones de principio a fin.

Entonces el diseño de un controlador por modo deslizante integral para el seguimiento de una señal de salida y_c para el sistema (2.1.34) es estudiado a continuación. Asumiendo que conocemos las condiciones iniciales de (2.1.34), y considerando que el seguimiento de la señal de salida y_c será de forma asintótica, entonces una propuesta muy común es definir una superficie deslizante σ dada por:

$$\sigma = \dot{e} + c e, \quad c > 0 \quad (2.1.36)$$

donde e representa el error de seguimiento dado por:

$$e = y - y_c$$

por lo que al considerar el sistema (2.1.34) tenemos que σ y $\dot{\sigma}$ están dadas por

$$\sigma = \dot{y} - \dot{y}_c + c(y - y_c) \quad (2.1.37)$$

$$\dot{\sigma} = u + \underbrace{f(y, \dot{y}, t) - \ddot{y}_c + c(\dot{y} - \dot{y}_c)}_{\phi(y, \dot{y}, t)} \quad (2.1.38)$$

$$\dot{\sigma} = u + \phi(y, \dot{y}, t), \quad |\phi(y, \dot{y}, t)| \leq M$$

para lograr el objetivo de que $y \rightarrow y_c$ cuando $t \rightarrow \infty$, es decir de forma asintótica, el control u será particionado en dos partes:

$$u = u_1 + u_2. \quad (2.1.39)$$

Por lo que tendremos:

- El control u_1 será el encargado de compensar la perturbación acotada $\phi(y, \dot{y}, t)$ de (2.1.38) desde el comienzo, es decir $\forall t \geq 0$, eliminando de esta manera la fase de alcance para una superficie deslizante auxiliar S , la cual será definida más adelante.
- El control u_2 llevará la superficie deslizante (2.1.36) a cero de forma asintótica, tomando en cuenta que (2.1.38) ya no estará perturbada, esto debido a que u_1 compensó dicha perturbación desde el comienzo.

Diseño del control u_1 . La variable deslizante auxiliar estará diseñada como:

$$\begin{cases} S = \sigma - z \\ \dot{z} = u_2 \end{cases} \quad (2.1.40)$$

además u_1 es diseñado como un *control por modos deslizantes convencional*, es decir al considerar:

$$S \dot{S} \leq -\bar{\alpha} |S(0)|, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\alpha} > 0$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} S(\dot{\sigma} - \dot{z}) &= S(u_1 + \phi(y, \dot{y}, t) - u_2) \\ &= S(u_1 + \phi(y, \dot{y}, t)) \end{aligned}$$

donde seleccionando

$$u_1 = -\rho \text{Sign}(S), \quad \text{con } \rho = M + \bar{\alpha}. \quad (2.1.41)$$

Se sabe que la variable deslizante auxiliar S alcanzará el cero en un tiempo finito t_r , el cual está dado por:

$$t_r = \frac{|S(0)|}{\bar{\alpha}} \quad (2.1.42)$$

lo que implica que $S = \dot{S} = 0$ para todo $t \geq t_r$. Entonces la condición $\dot{S} = 0$ produce:

$$\dot{S} = \underbrace{-\rho \text{Sign}(S)}_{u_{1eq}} + \phi(y, \dot{y}, t) = 0 \quad \forall t \geq t_r \quad (2.1.43)$$

Entonces

$$u_{1eq} = -\rho \text{Sign}(S) = -\phi(y, \dot{y}, t), \quad \forall t \geq t_r \quad (2.1.44)$$

Donde u_{1eq} dado en (2.1.44) es definido como el *control equivalente*, que solo puede ser aplicado una vez que $S = 0$.

Entonces la compensación de la perturbación $\phi(y, \dot{y}, t)$ se logrará solo después de la fase de alcance.

A continuación para eliminar la fase de alcance observemos que el tiempo t_r en (2.1.42) depende de $S(0)$, si proponemos que $S(0) = 0$, tendremos que el tiempo de alcance $t_r = 0$, y de esta manera se habrá eliminado la fase de alcance, logrando que $S = \dot{S} = 0$ para todo $t \geq 0$, de esta manera tendremos:

$$u_1 = u_{1eq} = -\rho \text{Sign}(S) = -\phi(y, \dot{y}, t), \quad \forall t \geq 0$$

Por lo que u_1 es capaz de compensar la perturbación acotada $\phi(y, \dot{y}, t)$ desde el comienzo. Pero para que $S(0) = 0$ se cumpla es necesario que

$$\begin{aligned} S(0) = \sigma(0) - z(0) = 0 &\Rightarrow z(0) = \sigma(0) \Rightarrow \\ z(0) = \underbrace{\dot{y}(0)}_{x_2(0)} - \dot{y}_c(0) + c(y(0) - y_c(0)) &\end{aligned} \quad (2.1.45)$$

Entonces una vez que se considera $u_1 = -\rho \text{Sign}(S)$ y $z(0)$ como se expresa en (2.1.45) se puede decir que el sistema (2.1.40) puede representarse como:

$$\begin{cases} \sigma = z \\ \dot{z} = u_2 \end{cases} \quad \text{con } z(0) = x_2(0) - \dot{y}_c(0) + c(y(0) - y_c(0)) \quad (2.1.46)$$

y entonces al considerar (2.1.46) tenemos:

$$\dot{\sigma} = u_2$$

y seleccionando u_2 como:

$$\begin{aligned} u_2 &= -K\sigma, \text{ con } K > 0 \Rightarrow \\ \dot{\sigma} &= -K\sigma, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

Lo que producirá que $\sigma \rightarrow 0$ de forma asintótica.

Por consiguiente el *control por modo deslizante integral* puede explicarse resumidamente como sigue:

Consideremos el sistema (2.1.38) y tomando en cuenta que $u = u_1 + u_2$. tenemos:

$$\dot{\sigma} = \underbrace{-\rho \text{Sign}(\sigma - z)}_{u_1} + \underbrace{(-K\sigma)}_{u_2} + \phi(y, \dot{y}, t) \quad (2.1.48)$$

- Entonces u_1 en (2.1.48) compensa $\phi(y, \dot{y}, t)$ desde el comienzo si y sólo si $z(0) = \sigma(0) = x_2(0) - \dot{y}_c(0) + c(y(0) - y_c(0))$, eliminando así la fase de alcance.
- Al tener las perturbaciones compensadas desde el comienzo, el control u_2 en (2.1.48) se encargará de lograr que $\sigma \rightarrow 0$ de forma asintótica.

Ejemplo 5. Los resultados de simulación del sistema (2.1.34) con el Control por Modo Deslizante integral (2.1.39), (2.1.41), (2.1.45), (2.1.47), con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -2$, $z(0) = x_2(0) - \dot{y}_c(0) + c(y(0) - y_c(0))$, y las ganancias de los controles $\rho = 8$, $K = 6$, el parametro $c = 1.5$, una referencia de salida $y_c = 2 \cos(t)$ y un disturbio $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$ (el cual es usado solo por propósitos de simulación), donde a continuación se discutirán las gráficas de simulación obtenidas.

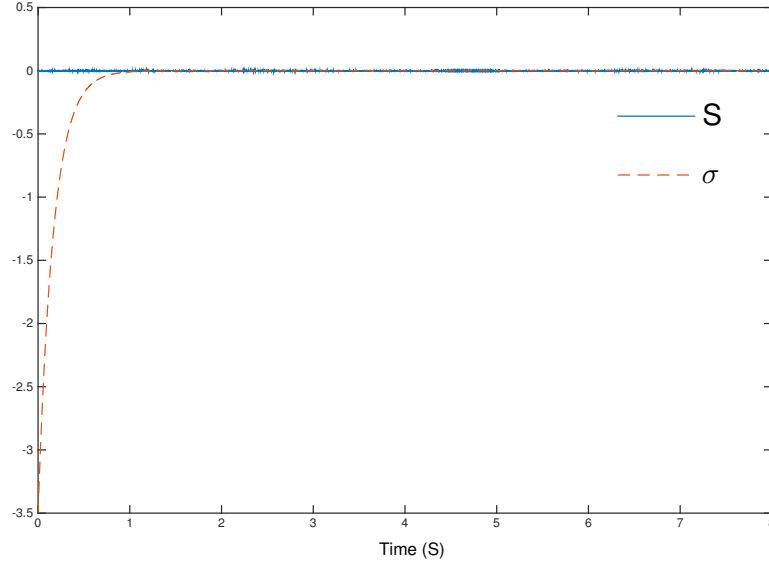


Figura 2.1.15: Variables deslizantes S y σ

En la figura (2.1.15) vemos como la perturbación $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$ es completamente compensada $\forall t \geq 0$, donde también se observa que $\sigma \rightarrow 0$ de manera asintótica desde el comienzo de la simulación

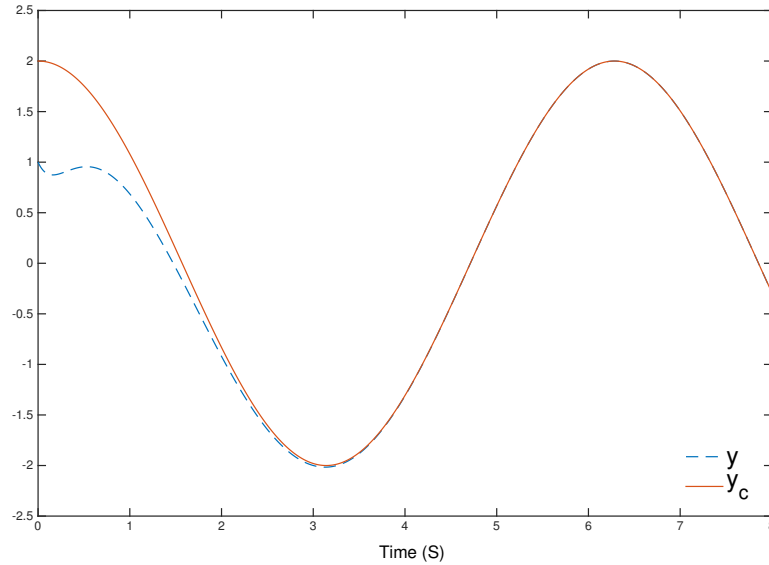


Figura 2.1.16: Seguimiento de la salida y_c

En la figura (2.1.16) se observa el seguimiento de la referencia deseada $y_c = 2 \cos(t)$, donde $y \rightarrow y_c$ de manera asintótica.

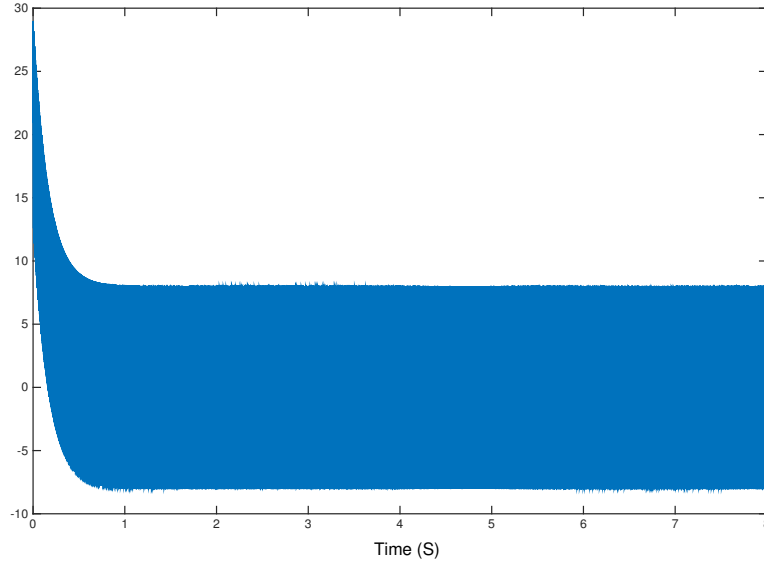


Figura 2.1.17: Control por Modo Deslizante Integral

En figura (2.1.17) se puede observar el pestañeo de alta frecuencia “*chattering*” que produce el *control por modo deslizante integral* para todo $t \geq 0$.

Algoritmo del Control Super-Twisting

El control super-twisting es de gran utilidad en controlar sistemas en los que pueden presentarse perturbaciones desconocidas, donde la ventaja principal al utilizar este tipo de control, es que combina la metodología de reducción del chattering con la robustez de los modos deslizantes de alto orden. De tal manera, que garantizará la convergencia de la superficie deslizante σ y su derivada $\dot{\sigma}$ a cero en tiempo finito, asegurando la robustez del sistema ante incertidumbres. La característica de la disminución del efecto del chattering se debe a que el control super-twisting es considerado ser continuo, y la convergencia $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$ en tiempo finito es porque el diseño del control-Super-Twisting se logra mediante la metodología de estabilidad de Lyapunov al considerar una función candidata de Lyapunov $V(\sigma)$.

A continuación antes de dar la descripción general del control super-twisting supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales que no presenta disturbio:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2 &= u & x_2(0) &= x_{20} \end{aligned} \tag{2.1.49}$$

donde nuestra tarea es llevar las variables de estado x_1 y x_2 a cero de manera asintótica, entonces como se vio anteriormente, un diseño adecuado de σ es el siguiente:

$$\sigma = x_2 + cx_1, \quad c > 0$$

de tal manera que cuando el control diseñado logre que $\sigma \rightarrow 0$ en tiempo finito t_r , los modos deslizantes x_1 y x_2 que están sobre $\sigma = 0$ tendrán soluciones asintóticamente estables a partir de este tiempo de convergencia en adelante, es decir:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t_r) \exp(-ct) \\ x_2 &= \dot{x}_1 = -cx_1(t_r) \exp(-ct) \end{aligned} \quad \forall t \geq t_r$$

Ahora si derivamos a σ con respecto al tiempo y nos basamos en (2.1.49) tendremos que $\dot{\sigma}$ es dado por

$$\dot{\sigma} = u + cx_2 \quad (2.1.50)$$

donde proponiendo a $u = -cx_2 + v$, tendremos:

$$\dot{\sigma} = v$$

ahora si proponemos $v = -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma)$ con $k_1 > 0$, y lo sustituimos en (2.1.50) se tiene que:

$$\dot{\sigma} = -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma) \quad (2.1.51)$$

donde puede mostrarse que σ y $\dot{\sigma}$ convergen a cero en tiempo finito t_r . Para demostrar esto supongamos una función de Lyapunov candidata $V(\sigma) > 0$ dada por

$$V(\sigma) = |\sigma|$$

además de que se realizará el mismo supuesto para la derivada de $V(\sigma)$ dado en (2.1.21). Esto con el fin de proveer estabilidad global en el punto de equilibrio $\sigma = 0$ en un tiempo finito t_r , es decir:

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2} < 0, \quad \alpha > 0$$

Entonces tenemos que la derivada de $V(\sigma)$ con respecto al tiempo está dada por:

$$\dot{V}(\sigma) = \frac{\sigma \dot{\sigma}}{|\sigma|} \leq -\alpha |\sigma|^{1/2} \quad (2.1.52)$$

y sustituyendo $\dot{\sigma}$ en (2.1.52) tenemos que la parte izquierda de la desigualdad de (2.1.52) es dada por:

$$\frac{\sigma(-k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma))}{|\sigma|} = \frac{\sigma(-k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma))}{\sigma \text{Sign}(\sigma)} = -k_1 |\sigma|^{1/2}$$

Entonces tenemos que

$$-k_1 |\sigma|^{1/2} \leq -\alpha |\sigma|^{1/2}. \quad (2.1.53)$$

Por tanto observemos que la parte izquierda de (2.1.53) es igual a la parte derecha de (2.1.53) si y sólo si $k_1 = \alpha$, es decir basta con que la constante k_1 sea un escalar positivo para lograr que σ y $\dot{\sigma}$ converjan a cero en tiempo finito t_r . El cual como se demostró anteriormente el tiempo de convergencia t_r está dado por:

$$t_r = \frac{2V^{1/2}(0)}{\alpha}$$

y debido a que $V(\sigma) = |\sigma|$, entonces el tiempo de convergencia t_r es

$$t_r = \frac{2|\sigma(0)|^{1/2}}{\alpha}$$

Ejemplo 6. A continuación se muestra un ejemplo de simulación donde se considera que las condiciones iniciales del sistema (2.1.49) están dadas por $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = -5$, con $c = 2$, y $k_1 = 1.5$.

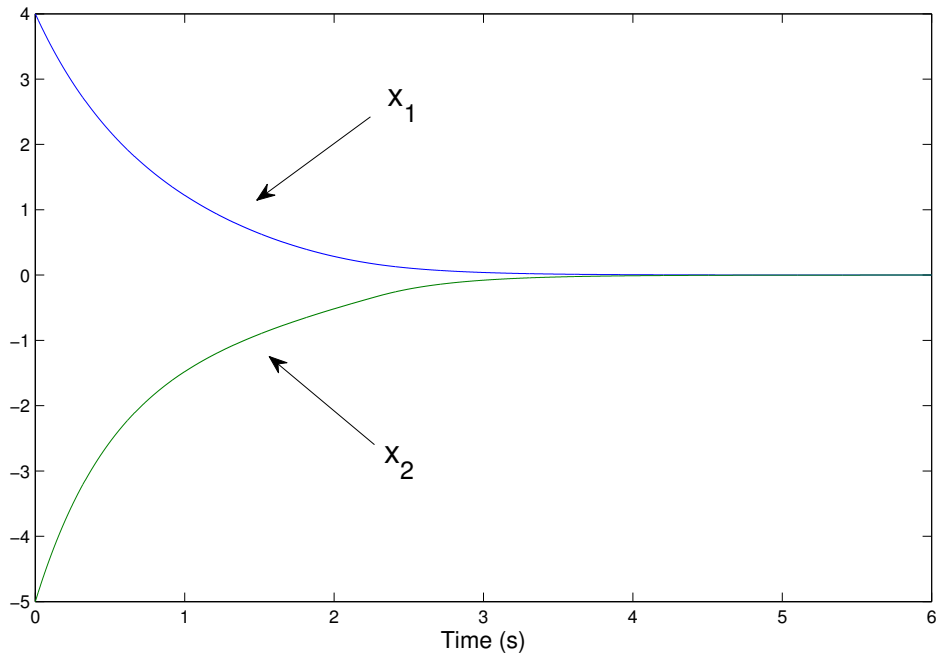


Figura 2.1.18: Variables x_1 y x_2

En figura (2.1.18) se muestra las soluciones x_1 y x_2 convergiendo a cero asintóticamente.

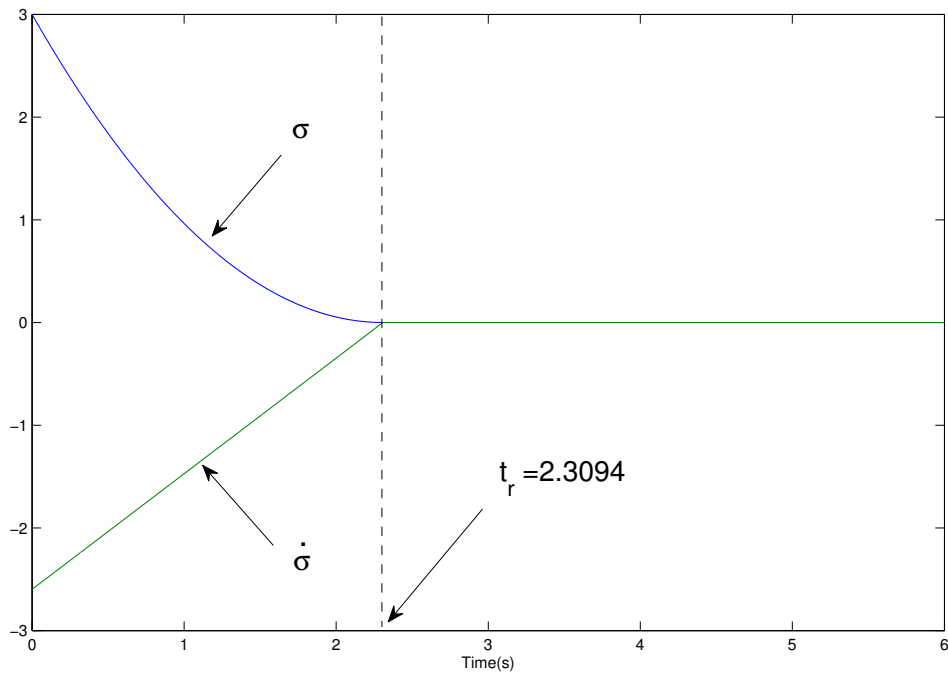


Figura 2.1.19: Superficies σ y $\dot{\sigma}$

En figura (2.1.19) se muestra la superficie deslizante σ y su derivada $\dot{\sigma}$ convergiendo a cero en un tiempo finito t_r

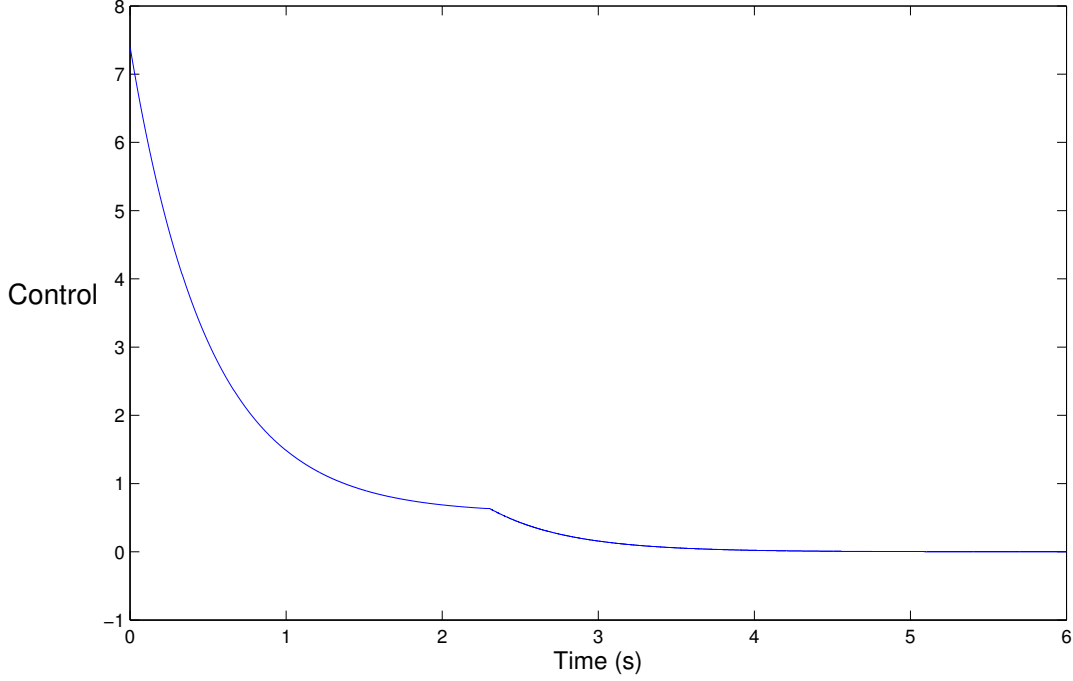


Figura 2.1.20: $u = -cx_2 - k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma)$

En la figura (2.1.20) se muestra que el control u no presenta el efecto de (chattering) a diferencia del presentado en la figura (2.1.6) y (2.1.14)

Observación 4. Notemos que el control $u = -cx_2 - k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma)$ está compuesto de dos términos $-cx_2$ y $-k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma)$ el primer término quita la parte lineal de $\dot{\sigma}$ mientras que el segundo término $v = -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma)$ es el encargado de hacer $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$ en tiempo finito t_r .

Definición 4. Consideremos el siguiente sistema escalar no lineal dado por:

$$\dot{\sigma} = f(t, x, \dot{x}) + v \quad (2.1.54)$$

donde $f(t, x, \dot{x})$ es una perturbación desconocida que está globalmente acotada por $|f(t, x, \dot{x})| \leq L$. Entonces el controlador por modos deslizantes **Super-Twisting** para compensar perturbaciones y disminución del chattering está dado por

$$\begin{aligned} v &= -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma) + w \\ \dot{w} &= -k_2 \text{Sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (2.1.55)$$

A continuación si sustituimos v de (2.1.54) en (2.1.55) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma) + w + f(t, x, \dot{x}) \\ \dot{w} &= -k_2 \text{Sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (2.1.56)$$

donde el término w dado en (2.1.56) llegará a ser igual al término $-f(t, x, \dot{x})$ en tiempo finito, posteriormente una vez que el término perturbativo sea compensado tenemos que (2.1.56) se convierte en:

$$\dot{\sigma} = -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma)$$

y como se vio anteriormente el término $-k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma)$ se encargará de hacer $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$ en tiempo finito.

Propiedades del control Super-Twisting

- El control super-twisting (2.1.55) es un *control por modos deslizantes de segundo orden*, donde lleva $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$ en tiempo finito.
- El control super-twisting (2.1.55) es continuo donde $-k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma)$ y el termino $w = -k_1 \int \text{Sign}(\sigma) dt$ son continuos.

Ejemplo 7. Enseguida se mostrará un ejemplo de simulación donde se desea que la posición x_1 alcance una trayectoria deseada x_r , esto se hará utilizando un controlador super-twisting, consideremos el siguiente sistema perturbado dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= 7 \\ \dot{x}_2 &= f(t, x_1) + u & x_2(0) &= -4 \end{aligned} \quad (2.1.57)$$

donde el término perturbativo $f(t, x_1) = \cos(\exp(x_1) - 1) + \sin(1/x_1^2) \exp(-1/(t^2 + 1))$ está acotado por

$$|\cos(\exp(x_1) - 1) + \sin(1/x_1^2) \exp(-1/(t^2 + 1))| \leq |\cos(\exp(x_1) - 1)| + |\sin(1/x_1^2)| |\exp(-1/(t^2 + 1))| \leq 2$$

de esta manera tenemos que la mínima cota superior está dada por $L = 2$,. A continuación si deseamos que x_1 alcance una trayectoria $x_r = 2 \cos(3t)$, tenemos que (2.1.57) tiene que transformarse a un sistema que éste en función de las dinámicas del error, esto es $e_1 = x_1 - x_r$, $e_2 = \dot{e}_1 = x_2 - \dot{x}_r$, $\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \ddot{x}_r$. entonces el sistema en función de las dinámicas del error está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 & e_1(0) &= 7 \\ \dot{e}_2 &= g(t, e_1) + u & e_2(0) &= -10 \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

donde la perturbación en términos del error está dada por $g(t, e_1) = f(t, e_1) + 18 \sin(3t)$, entonces tendremos que $g(t, e_1) \leq 20$, y la perturbación estará acotada por $\bar{L} = 20$. donde $g(t, e_1)$ es dada por

$$g(t, e_1) = \cos(\exp(e_1 + x_r) - 1) + \sin(1/(e_1 + x_r)^2) \exp(-1/(t^2 + 1)) + 18 \sin(3t)$$

Ahora lo que sigue es diseñar la superficie deslizante $\sigma = e_2 + ce_1$ donde $c > 0$, Entonces derivando a σ se tiene:

$$\dot{\sigma} = ce_2 + g(t, e_1) + u \quad (2.1.59)$$

donde u se propone como: $u = -ce_2 + v$

por tanto tendremos que (2.1.59) está expresado como:

$$\dot{\sigma} = g(t, e_1) + v$$

donde v es el control super-twisting dado en (2.1.55) para este ejemplo de simulación proponemos $c = 2.7$; con ganancias del control super-twisting dadas por $k_1 = 45$ y $k_2 = 45$, donde se muestran las gráficas correspondientes a este ejemplo de simulación:

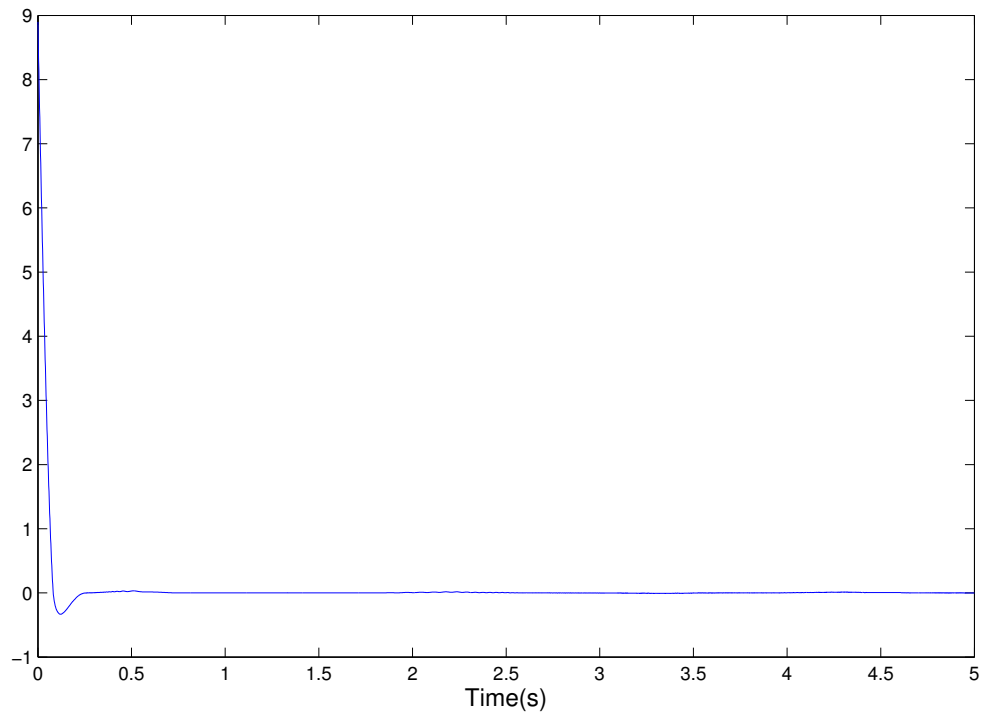


Figura 2.1.21: Superficie deslizante σ

En figura (2.1.21) se muestra la superficie deslizante σ convergiendo a cero.

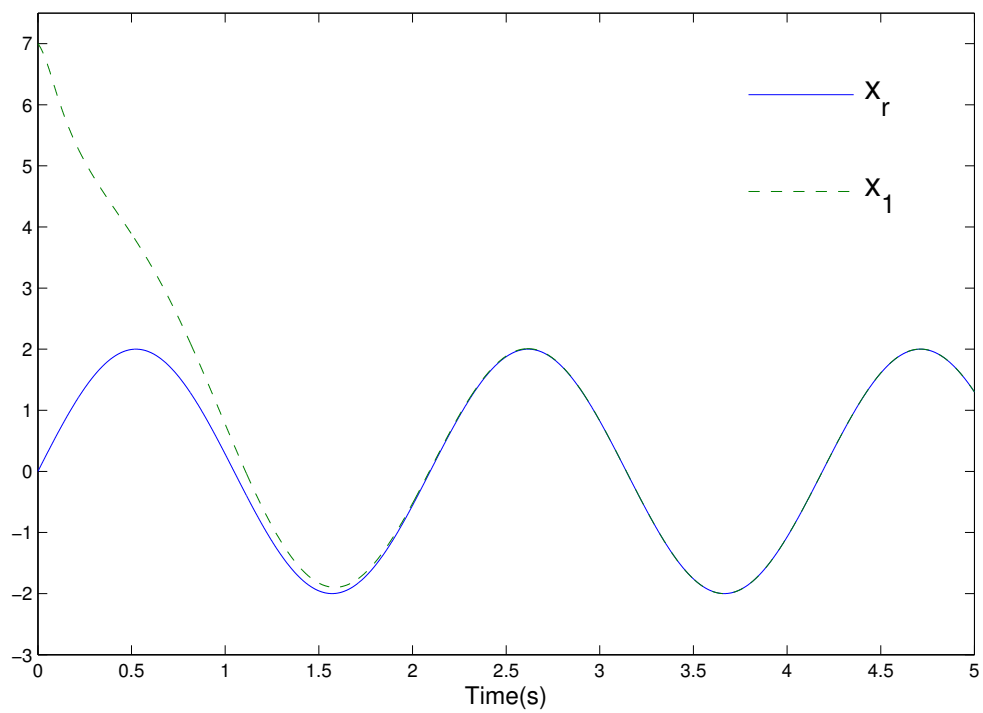


Figura 2.1.22: Referencia del seguimiento de $x_r = 2 \sin(3t)$

En figura (2.1.22) se muestra la dinámica x_1 siguiendo de forma asintótica a la referencia deseada x_r .

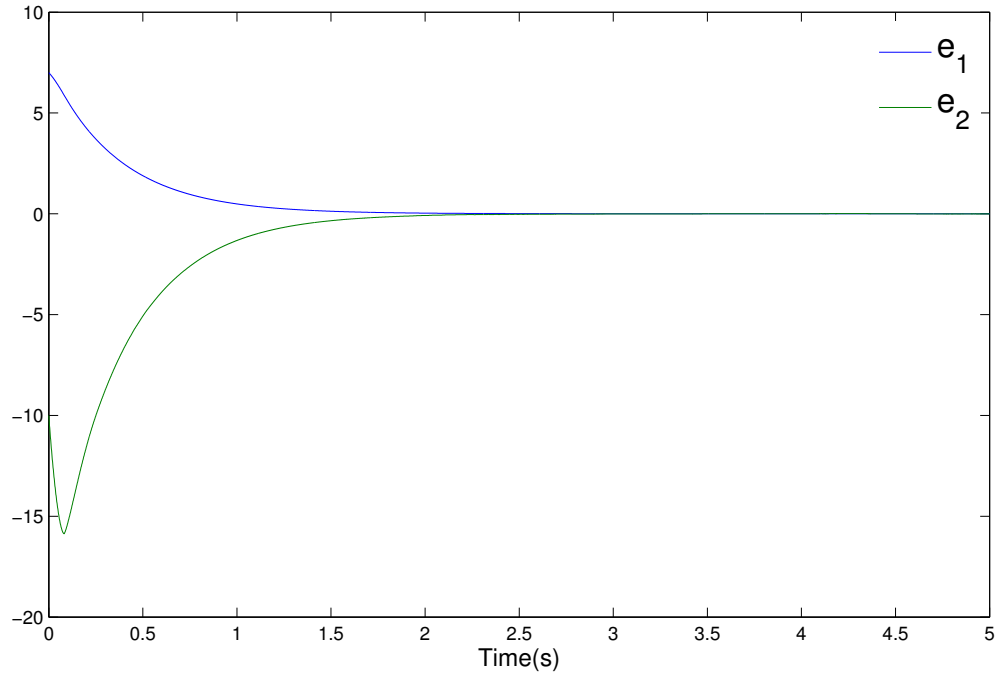


Figura 2.1.23: Errores e_1 y e_2

En figura (2.1.23) se observa el colapso a cero de los errores e_1 y e_2 lo que garantiza, que $x_1 \rightarrow x_r$ y $x_2 \rightarrow \dot{x}_r$.

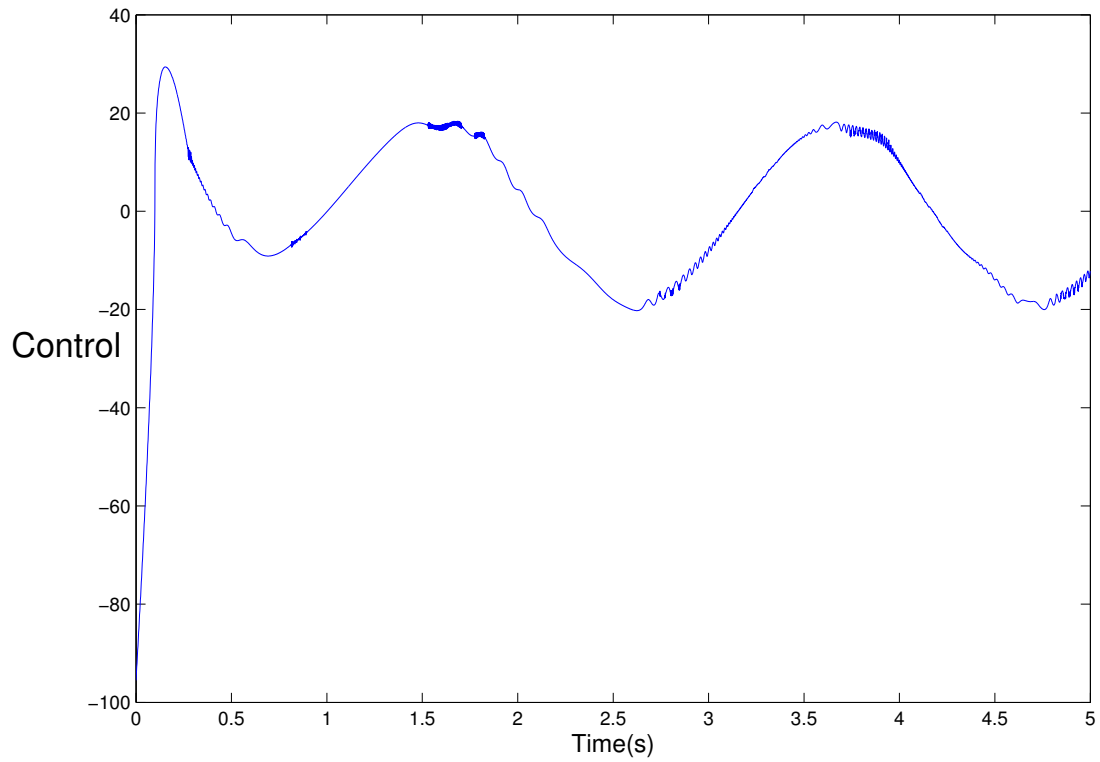


Figura 2.1.24: $u = -ce_2 - k_1 |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma) - k_2 \int \text{Sign}(\sigma) dt$

En figura (2.1.24) se muestra la representación gráfica del control Super-Twisting, mostrando que el efecto del Chattering ha disminuido considerablemente, a comparación del control por modos deslizantes tradicional.

Convergencia de las variables de estado a cero en tiempo finito

Consideremos el sistema perturbado dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t) & x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad (2.1.60)$$

donde $f(x_1, x_2, t)$ es una perturbación desconocida pero considerada acotada, es decir $|f(x_1, x_2, t)| \leq L$. Entonces si deseamos que las variables de estado x_1, x_2 converjan a cero en tiempo finito t_r , en presencia de disturbios necesitamos diseñar una superficie deslizante σ la cual será propuesta como:

$$\sigma = \dot{x}_1 + c|x_1|^{1/2} \text{Sign}(x_1), \quad c > 0 \quad (2.1.61)$$

de tal manera que cuando $\sigma \rightarrow 0$ en tiempo finito t_1 mediante un controlador por modos deslizantes tendremos que

$$\dot{x}_1(t_1) = -c|x_1(t_1)|^{1/2} \text{Sign}(x_1(t_1)) \quad (2.1.62)$$

y en particular la igualdad anterior debe satisfacerse para todo $t \geq t_1$. Donde además (2.1.62) es continua (ver figura (2.1.25))

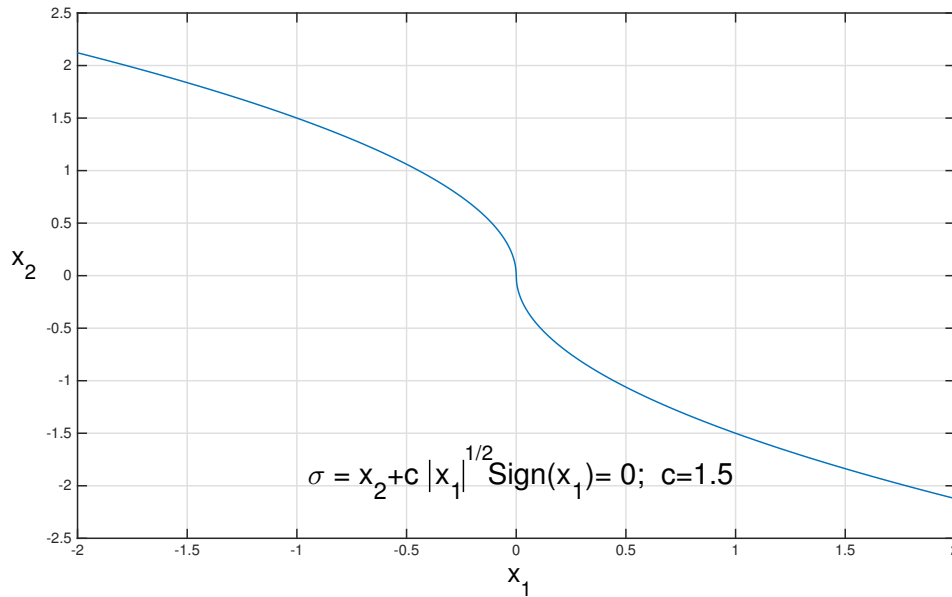


Figura 2.1.25: Continuidad de $\sigma = x_2 + c|x_1|^{1/2} \text{Sign}(x_1) = 0$

Ahora si deseamos conocer el tiempo de convergencia de las variables de estado x_1 y x_2 , entonces se procederá a integrar (2.1.62), teniendo de esta manera:

$$\int_{x_1(t_1)}^{x_1(t)} \frac{|x_1(\tau)|^{-1/2} dx_1(\tau)}{\text{Sign}(x_1(\tau))} = -c \int_{t_1}^t d\tau \quad (2.1.63)$$

Para realizar la integral (2.1.63) notemos que el término $\frac{|x_1(\tau)|^{-1/2}}{\text{Sign}(x_1(\tau))}$ correspondiente a la parte izquierda de la integral puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}
\frac{|x_1(\tau)|^{-1/2}}{\text{Sign}(x_1(\tau))} &= \frac{(x_1(\tau) \text{Sign}(x_1(\tau)))^{-1/2}}{\text{Sign}(x_1(\tau))} \\
&= x_1(\tau)^{-1/2} \text{Sign}(x_1(\tau))^{-3/2} \\
&= (x_1(\tau) [\text{Sign}(x_1(\tau))]^3)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{2.1.64}$$

Pero observemos que:

$$[\text{Sign}(x_1(\tau))]^3 = \text{Sign}(x_1(\tau)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1(\tau) > 0 \\ -1 & \text{si } x_1(\tau) < 0 \end{cases} \tag{2.1.65}$$

por lo que considerando (2.1.65) se tiene que (2.1.64) está dada por

$$(x_1(\tau) [\text{Sign}(x_1(\tau))]^3)^{-1/2} = (x_1(\tau) \text{Sign}(x_1(\tau)))^{-1/2} = |x_1(\tau)|^{-1/2}.$$

Entonces la integral (2.1.63) también puede ser escrita como:

$$\int_{x_1(t_1)}^{x_1(t)} |x_1(\tau)|^{-1/2} dx_1(\tau) = -c \int_{t_1}^t d\tau \tag{2.1.66}$$

e integrando (2.1.66) de forma directa, entonces:

$$|x_1(t)|^{1/2} - |x_1(t_1)|^{1/2} = -\frac{c}{2} (t - t_1). \tag{2.1.67}$$

Ahora si deseamos identificar el tiempo $t = t_r$ en el que $x_1(t_r) = x_2(t_r) = 0$, entonces en (2.1.67) tendremos

$$\cancel{|x_1(t_r)|^{1/2}} \overset{0}{\rightarrow} - |x_1(t_1)|^{1/2} = -\frac{c}{2} (t_r - t_1)$$

Por lo que encontramos que el tiempo t_r estará dado por

$$t_r = \frac{2|x_1(t_1)|^{1/2}}{c} + t_1. \tag{2.1.68}$$

Por consiguiente tenemos que $x_1, x_2 \rightarrow 0$ en un tiempo finito dado por la expresión (2.1.68).

Entonces el controlador u encargado de llevar la superficie deslizante (2.1.61) a cero en un tiempo finito t_1 , estará dado por

$$u = -\rho \text{Sign}(\sigma) = -\rho \text{Sign}(x_2 + c|x_1|^{1/2} \text{Sign}(x_1)) \tag{2.1.69}$$

donde la ganancia ρ es positiva y suficientemente grande. La ley de control (2.1.69) es llamado *control con ley de convergencia prescrita*.

Definición 5. El control $u = u(x_1, x_2)$ en (2.1.69) con una superficie deslizante no lineal (2.1.61) que lleva la variable de estado x_1 y a su derivada $\dot{x}_1 = x_2$ a cero en un tiempo finito t_r y las mantiene ahí para todo $t \geq t_r$ en presencia de disturbios acotados $f(x_1, x_2, t)$, es llamado **control por modo deslizante de segundo orden** y un modo deslizante ideal de segundo orden se dice estar tomando lugar $\forall t \geq t_r$.

Ejemplo 8. A continuación se realizará un ejemplo de simulación para el sistema (2.1.60) con condiciones iniciales dadas por $x_1(0) = 4.5$, $x_2(0) = -4.5$, y una perturbación propuesta por $f(x_1, x_2, t) = 2 \sin(3t)$, una ganancia de control $\rho = 5$ y un parámetro $c = 1.5$. De esta manera se obtienen los siguientes resultados de simulación, mostrando las gráficas de σ y las variables de estado x_1 y x_2 en la figura (2.1.26), y finalmente en figura (2.1.27) la representación gráfica del control u .

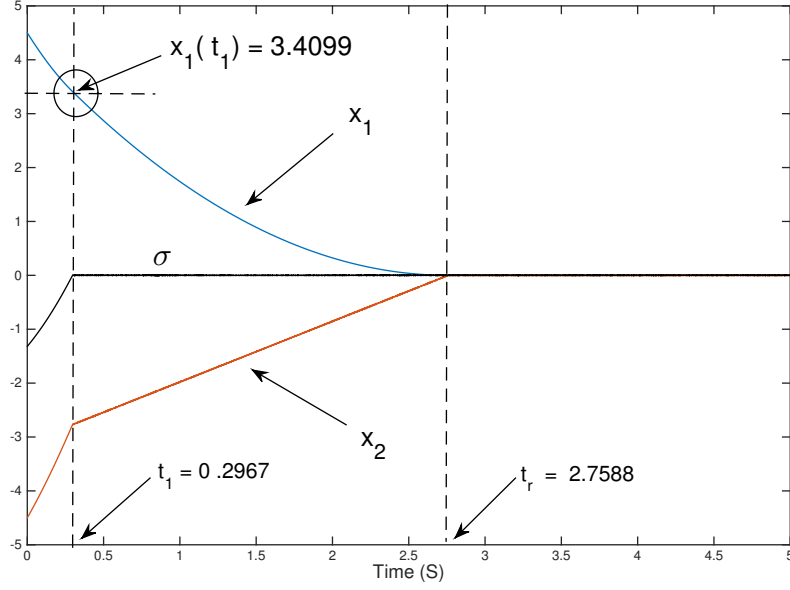


Figura 2.1.26: Variables de estado x_1 , $\dot{x}_1 = x_2$ y superficie deslizando $\sigma = \dot{x}_1 + 1.5 |x_1|^{1/2} \text{Sign}(x_1)$

En figura (2.1.26) está representado el comportamiento de las dinámicas x_1 y x_2 junto con la dinámica de la superficie deslizando $\sigma = \dot{x}_1 + 1.5 |x_1|^{1/2} \text{Sign}(x_1)$. En esta figura se observa que la superficie $\sigma \rightarrow 0$ en un tiempo finito $t_1 = 0.2967$, que es precisamente el tiempo en el que $x_2(t_1) + 1.5 |x_1(t_1)|^{1/2} \text{Sign}(x_1(t_1)) = 0$. En particular $x_2(t) = -1.5 |x_1(t)|^{1/2} \text{Sign}(x_1(t))$ para todo $t \geq t_1$, además en la figura (2.1.26) se muestra el colapso total de las dinámicas x_1 y x_2 a cero, el cual es llevado a cabo en un tiempo finito $t_r = 2.7588$. Cabe mencionar que t_1 fue encontrado utilizando el programa Matlab, así como $x_1(t_1)$, pero el tiempo finito t_r del colapso total de las dinámicas x_1 y x_2 a cero fue encontrado utilizando la fórmula (2.1.68).

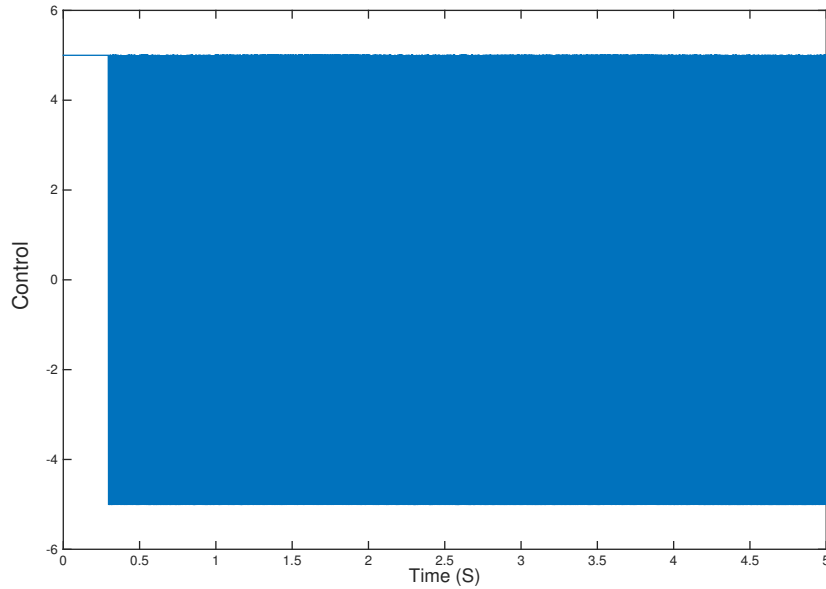


Figura 2.1.27: $u = -\rho \text{Sign}(x_2 + 1.5 |x_1|^{1/2} \text{Sign}(x_1))$

En figura (2.1.27) se observa el comportamiento de la variable de control u , encargada de hacer que la superficie deslizando $\sigma = \dot{x}_1 + 1.5 |x_1|^{1/2} \text{Sign}(x_1)$ converja a cero en un tiempo finito $t_1 = 0.2967$.

2.2. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN

El concepto de grado relativo de una superficie deslizante σ , es fundamental para definir a los controladores por modos deslizantes de alto orden, debido a que el orden de los controladores será igual al grado relativo de una superficie deslizante σ , es decir el orden será igual al número de veces que hay que derivar a σ para que la variable de control u aparezca por primera vez. Entonces el control u se denominará control por modos deslizantes de alto orden debido al grado relativo de la superficie deslizante σ , entonces si el número de veces que derivamos a σ es denotado por i , entonces el control por modos deslizantes de orden i será el encargado de hacer que $\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{i-1} \rightarrow 0$ en tiempo finito, donde estos controladores de alto orden están descritos en ([48]) donde son también nombrados quasicontinuos de alto orden debido a que estos controles no son continuos en $\sigma = 0$.

Entonces el control quasicontinuo de alto orden ([48],[50]) para $i = 1, 2, 3, 4$ tienen la forma :

$$\begin{aligned} v_1 &= -\alpha \text{Sign}\sigma, \\ v_2 &= -\alpha \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{Sign}\sigma \right) / \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2} \right), \\ v_3 &= -\alpha \frac{\left[\ddot{\sigma} + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3} \right)^{-1/2} \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \text{Sign}\sigma \right) \right]}{\left[|\ddot{\sigma}| + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3} \right)^{1/2} \right]}, \\ v_4 &= -\alpha \varphi_{3,4} / N_{3,4}, \\ \varphi_{3,4} &= \ddot{\sigma} + 3 \left[\ddot{\sigma} + \left(|\dot{\sigma}| + 0.5 |\sigma|^{3/4} \right)^{-1/3} \left(\dot{\sigma} + 0.5 |\sigma|^{3/4} \text{Sign}\sigma \right) \right] \\ &\quad \times \left[|\ddot{\sigma}| + \left(|\dot{\sigma}| + 0.5 |\sigma|^{3/4} \right)^{2/3} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

y

$$N_{3,4} = |\ddot{\sigma}| + 3 \left[\ddot{\sigma} + \left(|\dot{\sigma}| + 0.5 |\sigma|^{3/4} \right)^{-2/3} \right]^{1/2}, \quad (2.2.2)$$

Ejemplo 9. para ver la funcionalidad de estos controladores se aplicará un ejemplo de simulación a un péndulo con longitud variable $L(t)$, donde se buscará que el ángulo θ siga una trayectoria deseada θ_r .

La ecuación que describe el movimiento del péndulo está dada por:

$$\ddot{\theta} = -2 \frac{\dot{L}}{L} \dot{\theta} - g \frac{1}{L} \sin(\theta) + \frac{1}{mL^2} u, \quad (2.2.3)$$

si en (2.2.3) se considera $\theta = \theta_1$ y $\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 = \theta_2$, entonces (2.2.3) puede representarse como un sistema de ecuaciones diferenciales que esté en términos de la velocidad y aceleración angular, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= -2 \frac{\dot{L}}{L} \theta_2 - g \frac{1}{L} \sin(\theta_1) + \frac{1}{mL^2} u \end{aligned}$$

donde $m = 1$ y $g = 9.81$ es la constante gravitatoria. Y sean $0 < L_m \leq L \leq L_M$, \dot{L} , \ddot{L} , $\dot{\theta}_r$ y $\ddot{\theta}_r$ funciones acotadas, además debido a que deseamos que θ siga una trayectoria deseada θ_r es conveniente diseñar una superficie deslizante σ como el error entre estas dos variables es decir $\sigma = \theta - \theta_r = \theta_1 - \theta_r$ donde se espera lograr que $\sigma \rightarrow 0$ en un tiempo finito t_r de esta manera tendremos $\theta_1 \rightarrow \theta_r$ en tiempo finito.

A continuación por propósito de simulación consideramos que las funciones L y θ_r están dadas por

$$\begin{aligned} L &= 0.8 + 0.1 \sin(8t) + 0.3 \cos(4t), \\ \theta_r &= 0.5 \sin(0.5t) + 0.5 \cos(t) \end{aligned}$$

observemos que la superficie deslizante $\sigma = \theta_1 - \theta_r$ tiene grado relativo igual a 2, lo cual significa que derivando a σ dos veces, la variable de control u aparecerá por vez primera, de acuerdo a esto un control por modos deslizantes de segundo orden es necesitado para lograr que $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$ en tiempo finito, por tanto el control quasicontinuo de segundo orden a utilizar está dado por:

$$u = -\alpha \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma) \right) / \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2} \right)$$

donde tenemos que σ , $\dot{\sigma}$ y $\ddot{\sigma}$ están dados por:

$$\sigma = \theta_1 - \theta_r$$

$$\dot{\sigma} = \theta_2 - \dot{\theta}_r$$

$$\ddot{\sigma} = -2\frac{\dot{L}}{L}\theta_2 - g\frac{1}{L}\sin(\theta_1) + \frac{1}{mL^2}u - \ddot{\theta}_r$$

Donde las condiciones iniciales a considerar están dadas por $\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0, \theta_r(0) = 0.5, \dot{\theta}_r(0) = 0.25, \sigma(0) = -0.5, \dot{\sigma}(0) = -0.25$, donde la ganancia del control quascontinuo es de $\alpha = 10$. Enseguida se muestran las simulaciones referentes a la posición angular θ , y a la velocidad angular $\dot{\theta}$

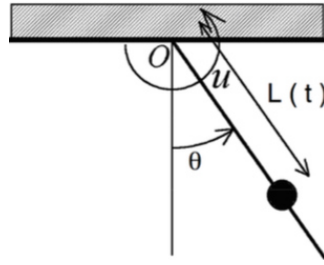


Figura 2.2.1: Péndulo con longitud variable $L(t)$

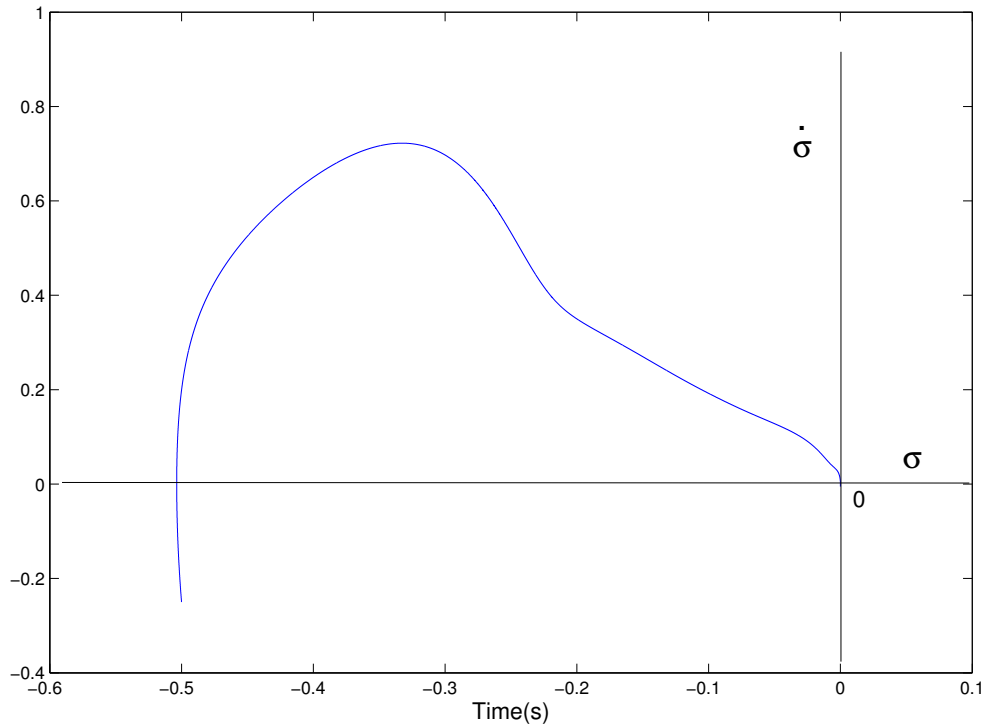


Figura 2.2.2: Diagrama fase σ y $\dot{\sigma}$

En figura (2.2.2) puede apreciarse la convergencia a cero de $\sigma = \theta - \theta_r$ y $\dot{\sigma} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_r$ en tiempo finito, lo que producirá que tanto la posición angular θ así como la velocidad angular $\dot{\theta}$ converjan en tiempo finito a las referencias deseadas de posición angular θ_r y velocidad angular $\dot{\theta}_r$ respectivamente.

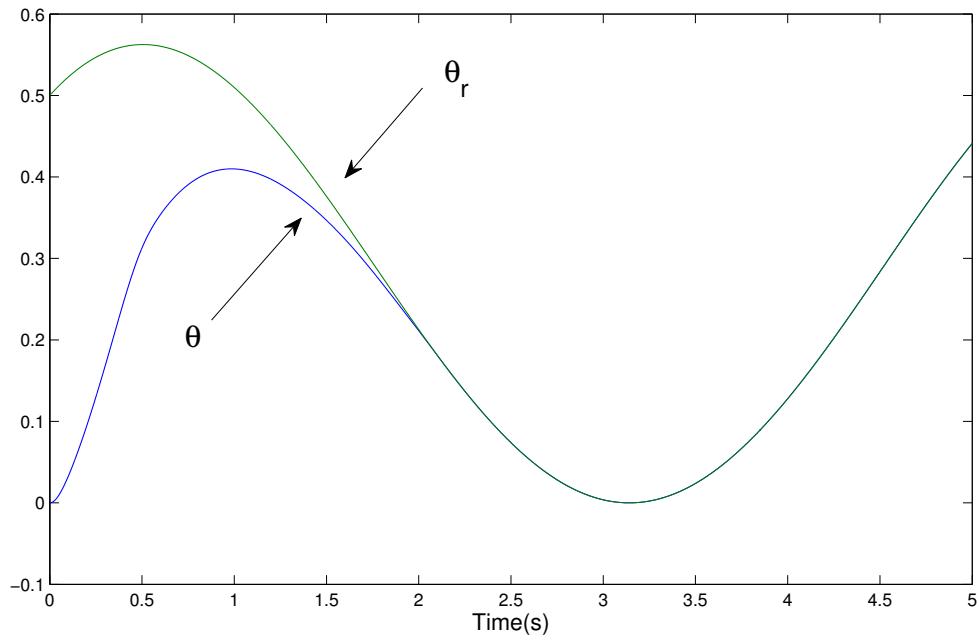


Figura 2.2.3: Posición angular θ y posición angular de referencia θ_r

En figura (2.2.3) observamos la dinámica de la posición angular θ la cual al pasar el tiempo se va aproximando cada vez más a la dinámica de la posición angular deseada θ_r .

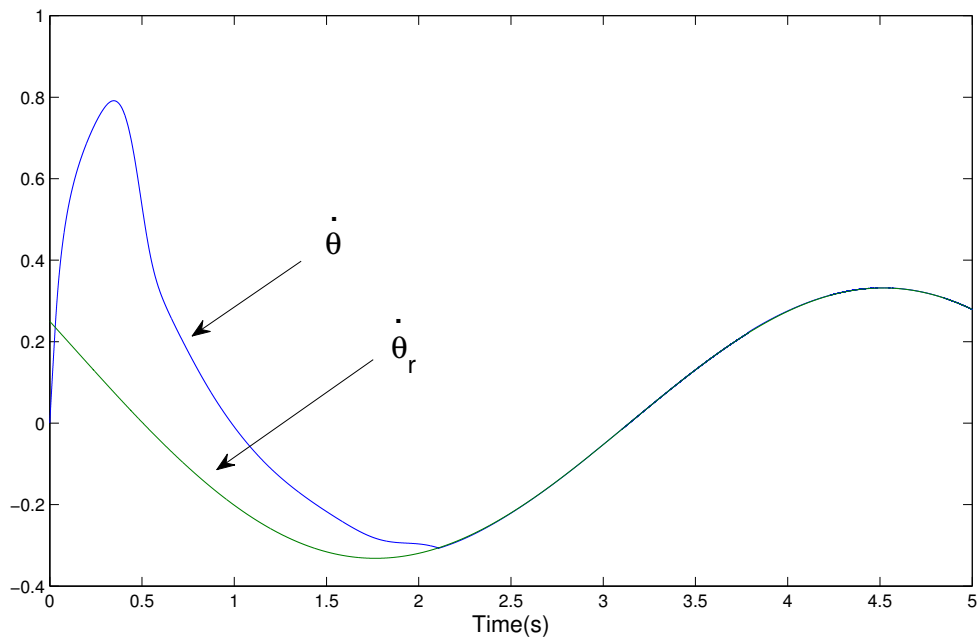


Figura 2.2.4: Velocidad angular $\dot{\theta}_r$ y velocidad angular de referencia $\dot{\theta}$

En figura (2.2.4) observamos la dinámica de la velocidad angular $\dot{\theta}$ la cual al pasar el tiempo se va aproximando cada vez más a la dinámica de la velocidad angular deseada $\dot{\theta}_r$.

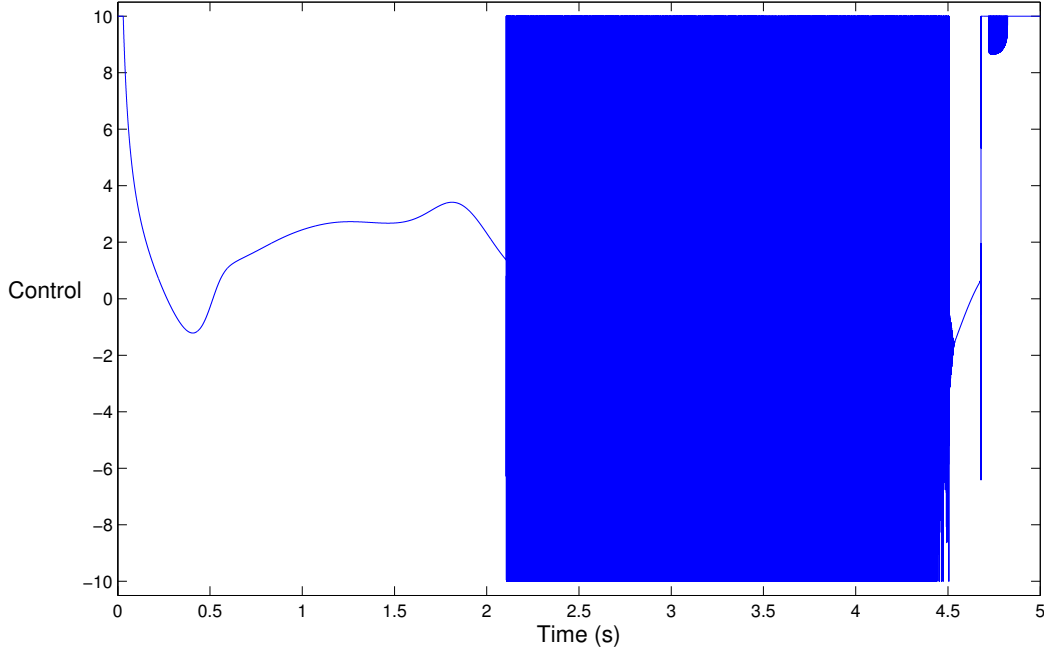


Figura 2.2.5: Control quasicontinuo de segundo orden $u = -10 \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{Sign}(\sigma) \right) / \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2} \right)$

En figura (2.2.5) vemos el comportamiento del control quasicontinuo de segundo orden, donde puede apreciarse que una vez que la variable de control u ha logrado colapsar a cero las dinámicas de σ y $\dot{\sigma}$, es cuando comienza a apreciarse un incremento considerable en el chattering de la variable de control u .

2.3. CONTROL ÓPTIMO

El desarrollo de la teoría del control óptimo se elástica en la década de los cincuenta gracias al esfuerzo de científicos rusos y norteamericanos por explorar el sistema solar. El problema a resolver era el de llevar un vehículo espacial de algún punto en la tierra a algún otro en el espacio en tiempo mínimo y consumiendo la menor cantidad de combustible posible. Es decir, de lo que se trataba era de encontrar trayectorias óptimas en espacios tridimensionales. Como se puede ver, la solución de dicho problema no podía encontrarse aplicando las técnicas de optimización tradicionales que solo nos dan valores de la variable independiente para los que una función dada alcanza un punto máximo o mínimo, ya sea local o global.

En teoría de control de sistemas cuando se habla de la solución óptima intuitivamente se piensa que esta es la “mejor solución” es decir “insuperable” pero para calificar la bondad de un control (en particular para decir que es óptimo) es necesario asociarlo a un funcional de costo. Donde en términos de control decimos que un control es óptimo si minimiza un funcional de costo en el que se manifiesta un compromiso entre distintas especificaciones y restricciones. A este funcional también llamado índice de ejecución está indicado por J . Así que en términos de control se dice que un control $u(\cdot)$ es óptimo si minimiza el funcional de costo

$$J(x_0, u) := \int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt + h(x(T)) \quad (2.3.1)$$

donde la variable de estado $x(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (2.3.2)$$

Aquí $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ y x_0 es un vector en \mathbb{R}^n de condiciones iniciales para la dinámica de $x(t)$ la cual comienza en $t = 0$ y termina en un tiempo terminal fijo $T > 0$.

2.4. TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN

La Ecuación de Euler-Lagrange

A continuación se derivarán las condiciones necesarias de primer orden para el problema básico de optimización dinámica para encontrar un control $u(\cdot)$ que minimice a (2.3.1), donde los supuestos para las funciones f , g y h están dados por.

- $f(t, x, u)$ y $g(t, x, u)$ son funciones continuas en \mathbb{R}^{1+n+m} . por otra parte, para ambas f y g todas sus derivadas parciales en x y u existen y son continuas.
- $h(x) \in C^1$.
- Además asumimos que el conjunto de controles admisibles \mathcal{U} , consiste del conjunto de funciones que son continuas en $[0, T]$.

Basados por la teoría de optimización estática introducimos para cada t en el intervalo $[0, T]$ la cantidad $\lambda(t) [f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t)]$, donde el multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$ (también llamado la variable de co-estado) es un vector renglón escogido arbitrariamente que debe ser diferenciable, donde $f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t) = 0$ para cada t , en particular

$$\int_0^T \lambda(t) [f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t)] dt = 0. \quad (2.4.1)$$

podemos anexar esta cantidad (2.4.1) a la función de costo (2.3.1) para obtener una función de costo \bar{J} la cual coincide con la función de costo J si la restricción dinámica de la ecuación (2.3.2) es satisfecha, esto es,

$$\bar{J} := \int_0^T \{g(t, x, u) + \lambda(t) f(t, x, u) - \lambda(t) \dot{x}(t)\} dt + h(x(T)).$$

Introduciendo la función Hamiltoniana H como

$$H(t, x, u, \lambda) := g(t, x, u) + \lambda(t) f(t, x, u), \quad (2.4.2)$$

por lo que podemos escribir a \bar{J} como

$$\bar{J} := \int_0^T \{H(t, x, u, \lambda) - \lambda(t) \dot{x}(t)\} dt + h(x(T)). \quad (2.4.3)$$

La integración por partes nos muestra que

$$-\int_0^T \lambda(t) \dot{x}(t) dt = -\lambda(T) x(T) + \lambda(0) x_0 + \int_0^T \dot{\lambda}(t) x(t) dt$$

y sustituyendo este resultado dentro de (2.4.3) puede escribirse como

$$\bar{J} := \underbrace{\int_0^T \{H(t, x, u, \lambda) + \dot{\lambda}(t) x(t)\} dt}_{:= \bar{J}_1} + \underbrace{h(x(T)) - \lambda(T) x(T)}_{:= \bar{J}_2} + \underbrace{\lambda(0) x_0}_{:= \bar{J}_3}. \quad (2.4.4)$$

Donde esta expresión de \bar{J} tiene tres términos aditivos \bar{J}_1 , \bar{J}_2 y \bar{J}_3 el primer término \bar{J}_1 está referido a todo el periodo $[0, T]$, el término \bar{J}_2 se refiere exclusivamente con el tiempo final, y el tercer término \bar{J}_3 , depende solo del tiempo inicial.

Una vez más, subrayamos que la elección de $\lambda(t)$ no afectará el valor de \bar{J} , mientras la variable de estado $x(t)$ satisfice la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, dicho de otra forma,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (2.4.5)$$

Para librarnos de otras preocupaciones sobre el efecto de $\lambda(t)$ sobre \bar{J} , simplemente imponemos la ecuación (2.4.5) como una condición necesaria para la maximización o minimización de \bar{J} .

A continuación se asume que $u^*(t) \in U$ es un control óptimo que genera el valor mínimo de \bar{J} y $x^*(t)$ es la correspondiente trayectoria óptima. Si perturbamos este control óptimo $u^*(t)$ con una perturbación continua $p(t)$, podemos generar 'vecindades' de trayectorias de control

$$u(t) = u^*(t) + \epsilon p(t) \quad (2.4.6)$$

donde ϵ es un escalar pequeño. Se sabe que para ϵ lo suficientemente pequeño, cada vecindad de control correspondiente induce una correspondiente vecindad de trayectorias de estado $x(t, \epsilon)$ la cual es también definida sobre todo el intervalo $[0, T]$. Ahora el costo inducido por esta función de control se convierte también en una función dependiente del escalar ϵ . De la ecuación (2.3.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{J}(\epsilon) = & \int_0^T \left\{ H(t, x(t, \epsilon, p), u^*(t) + \epsilon p(t), \lambda) + \dot{\lambda}(t) x(t, \epsilon, p) \right\} dt \\ & + h(x(T, \epsilon, p)) - \lambda(T) x(T, \epsilon, p) + \lambda(0) x_0 \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Por suposición $\bar{J}(\epsilon)$ tiene un mínimo en $\epsilon = 0$. Notemos que debido a la suposición de diferenciabilidad de f , g y h , $\bar{J}(\epsilon)$ es una función diferenciable con respecto a ϵ . Así la primer condición de primer orden implica que $\frac{d\bar{J}(\epsilon)}{d\epsilon} = 0$ en $\epsilon = 0$. Evaluando la derivada de $\bar{J}(\epsilon)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}(\epsilon)}{d\epsilon} = & \int_0^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx(t, \epsilon, p)}{d\epsilon} + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) + \dot{\lambda}(t) \frac{dx(t, \epsilon, p)}{d\epsilon} \right\} dt \\ & + \frac{\partial h(x(T))}{\partial x} \frac{dx(T, \epsilon, p)}{d\epsilon} - \lambda(T) \frac{dx(T, \epsilon, p)}{d\epsilon} \end{aligned}$$

si agrupamos los términos en común de $\frac{d\bar{J}(\epsilon)}{d\epsilon}$ tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}(\epsilon)}{d\epsilon} = & \int_0^T \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}(t) \right) \frac{dx(t, \epsilon, p)}{d\epsilon} + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) \right\} dt \\ & + \left(\frac{\partial h(x(T))}{\partial x} - \lambda(T) \right) \frac{dx(T, \epsilon, p)}{d\epsilon} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Notemos que $\lambda(t)$ hasta ahora es arbitraria. Por consiguiente la igualdad $\frac{d\bar{J}(\epsilon)}{d\epsilon} = 0$ en $\epsilon = 0$ debería en particular mantenerse si $\lambda(t)$ se escoge como una solución del siguiente problema de valor de frontera

$$\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda)}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0, \quad \text{con} \quad \frac{\partial h(x^*(T))}{\partial x} - \lambda(T) = 0.$$

y además para mantener la igualdad $\frac{d\bar{J}(\epsilon)}{d\epsilon} = 0$ en $\epsilon = 0$ también en (2.4.8) es necesario que

$$\int_0^T \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda)}{\partial u} p(t) dt = 0.$$

esta igualdad debe de mantenerse para cualquier función continua $p(t)$ sobre $[0, T]$. Escogiendo $p(t) = \frac{\partial H^T(t, x^*, u^*, \lambda)}{\partial u}$ muestra que otra condición necesaria es que

$$\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda)}{\partial u} = 0.$$

De esta manera presentamos el siguiente teorema

Teorema 1. (EULER-LAGRANGE)

Considera el problema de optimización dado por la ecuación (2.3.1) y (2.3.2). Sea $H(t, x, u, \lambda) = g(t, x, u) + \lambda f(t, x, u)$. Asume que las funciones f, g y h satisface los supuestos establecidos anteriormente. Si $u^*(t) \in \mathcal{U}$ es un control que mantiene un mínimo local para la funcional (2.3.1), y $x^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ son los correspondientes estados y co-estados, entonces es necesario que

$$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*, u^*) = \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial \lambda}, \quad x^*(0) = x_0;$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial x}; \quad \lambda^*(T) = \frac{\partial h(x^*(T))}{\partial x}$$

y para todo $t \in [0, T]$,

$$\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial u} = 0.$$

Principio Máximo de Pontryagin

Asumiendo que existe un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ tal que para todo $t \in [0, T]$, $u(t) \in U$. El conjunto de funciones de controles admisibles \mathcal{U} consiste de funciones medibles desde $[0, T]$ en U , además para que la ecuación diferencial (2.3.2) tenga solución única sobre $[0, T]$ y el funcional de costo (2.3.1) exista, se debe cumplir:

- f y g deben ser funciones continuas en u , $f_u(t, x) := f(t, x, u(t))$ y $g_u(t, x) := g(t, x, u(t))$ son también funciones medibles. Como consecuencia la función de costo (2.3.1) existe si y sólo si se asume que U es acotado.
- f debe satisfacer la desigualdad

$$|f(t, x, u)| \leq L|x| + N, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U,$$

Para algunas constantes positivas L y N , la ecuación diferencial (2.3.2) tiene una única solución para todas las funciones medibles u , ver por ejemplo ([42]).

Entonces tenemos la siguiente generalización del teorema 1 de Euler-Lagrange, el tan mencionado principio de Pontryagin.

Teorema 2. (PONTYAGIN)

Considera el problema de optimización dado por las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2). Asume que las funciones f, g y h satisfacen los Supuestos Básicos e introducimos $H = g + \lambda f$. sea $u^*(t) \in \mathcal{U}$ ser un control que produce un mínimo local para la funcional de costo (2.3.1), y sea $x^*(t)$ la correspondiente trayectoria de estado. Entonces existe una función de co-estado $[\lambda^*]^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface

$$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*, u^*) = \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial \lambda}, \quad x^*(0) = x_0; \tag{2.4.9}$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial x}; \quad \lambda^*(T) = \frac{\partial h(x^*(T))}{\partial x} \tag{2.4.10}$$

y, para todo $t \in (0, T)$ en el cual u^* es continua,

$$H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \min_{u \in U} H(t, x^*, u, \lambda^*), \quad (2.4.11)$$

esto es

$$u^*(t) = \operatorname{argmin}_{u \in U} H(t, x^*, u, \lambda^*)$$

2.5. PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO SINGULAR

Tomando en cuenta que el principio del máximo de Pontryagin se quiere encontrar un control u que es considerado acotado, y que se encargue de minimizar el funcional de costo

$$J(x_0, u) := \int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt + h(x(T))$$

el cual está sujeto al sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)).$$

Entonces algunas veces pueden presentarse problemas al momento de querer encontrar dicho control u . En **Control Óptimo** existen problemas que son difíciles de resolver porque una aplicación directa del Principio del Máximo de Pontryagin falla para dar una solución completa. Este tipo de problemas son llamados de **control singular**. Pocos son los problemas que se han resuelto, de estos se pueden mencionar en la economía financiera el **problema de la cartera de Merton**, y en el sector aeronáutico la **optimización de una trayectoria**. En seguida se dará una explicación más detallada de este tipo de problemas:

Tenemos que la dificultad más común al aplicar el principio del máximo de Pontryagin es cuando el Hamiltoniano depende linealmente del control u , es decir $H = \phi(x, \lambda, t)u$ y el control u se limita a estar entre un límite inferior a y un límite superior b : $a \leq u(t) \leq b$. Entonces para minimizar el hamiltoniano $H(t, x, u, \lambda)$ primeramente se toma el caso cuando $\phi(x, \lambda, t) < 0$ entonces tendremos que:

$$b\phi(x, \lambda, t) \leq \phi(x, \lambda, t)u(t) \leq a\phi(x, \lambda, t)$$

$$b\phi(x, \lambda, t) \leq H(t, x, \lambda, u) \leq a\phi(x, \lambda, t)$$

$$H(t, x, \lambda, u) = b\phi(x, \lambda, t)$$

$$\Rightarrow \phi(x, \lambda, t)u(t) = b\phi(x, \lambda, t)$$

$$\Rightarrow u(t) = b \text{ si } \phi(x, \lambda, t) < 0$$

Ahora tomando el caso cuando $\phi(x, \lambda, t) > 0$ tendremos

$$a\phi(x, \lambda, t) \leq \phi(x, \lambda, t)u(t) \leq b\phi(x, \lambda, t)$$

$$a\phi(x, \lambda, t) \leq H(t, x, \lambda, u) \leq b\phi(x, \lambda, t)$$

$$H(t, x, \lambda, u) = a\phi(x, \lambda, t)$$

$$\Rightarrow \phi(x, \lambda, t)u(t) = a\phi(x, \lambda, t)$$

$$\Rightarrow u(t) = a \text{ si } \phi(x, \lambda, t) > 0$$

Y además la condición de minimización $\partial H(t, x, \lambda, u)/\partial u = 0$ nos da como resultado

$$\phi(x, \lambda, t) = 0$$

en este caso no se tiene ninguna condición de como tomar el control $u(t)$, por lo que $u(t)$ es indefinida. de acuerdo a los resultados anteriores se tiene:

$$u(t) = \begin{cases} b & \text{si } \phi(x, \lambda, t) < 0 \\ \text{indefinida} & \text{si } \phi(x, \lambda, t) = 0 \\ a & \text{si } \phi(x, \lambda, t) > 0 \end{cases}$$

por lo que este control es de conmutación es decir cambia tomando los valores a , b y cero instantáneamente, Esto dependiendo del signo que tome $\phi(x, \lambda, u)$. A este tipo de control se le llama **Control bang-bang**.

El caso cuando ϕ permanece en cero durante un período de tiempo finito $t_1 \leq t \leq t_2$ se llama el caso de **control singular**. Entre t_1 y t_2 la minimización del hamiltoniano con respecto a u no nos da ninguna información útil y la solución en ese intervalo de tiempo se va a tener que obtener tomando otras consideraciones. (Un enfoque consistiría en diferenciar repetidamente $\partial H / \partial u$ con respecto al tiempo hasta que el control u vuelva aparecer de forma explícita, Entonces se puede establecer una la expresión igualada a cero y resolver para u . Esto equivale a decir que entre t_1 y t_2 el control u está determinado por el requisito de que la condición de singularidad se siga manteniendo. El llamado arco singular resultante será óptimo si se satisface la **condición de Kelley**, ver ([9])

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{2k} H_u \right] \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

El término control-bang singular se refiere a un control que tiene una porción bang-bang, así como una parte singular.

A continuación consideremos el siguiente problema de un control escalar: minimizar

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T x_1^2 dt$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= u & x_2(0) &= -3 \end{aligned}$$

donde $|u| \leq 1$.

Entonces tendremos que la función hamiltoniana está dada por

$$H(x, u, \lambda) = \frac{1}{2} x_1^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$$

A continuación tenemos que para minimizar el funcional aplicamos el principio del máximo de Pontryagin haciendo $H_u = 0$, por lo que para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$ se tiene que

$$H_u = \lambda_2 = 0. \tag{2.5.1}$$

Observemos que en (2.5.1) no aparece la variable de control u , por lo que de manera inmediata no se tiene información precisa de quien debe ser u óptimo, para dar una solución completa al problema de minimización. Por tanto este es un problema de control singular. Ahora si derivamos a H_u consecutivamente con respecto al tiempo, para obtener información útil para resolver este problema tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_u = \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 = 0 & \quad \frac{d^3}{dt^3}H_u = \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}H_u = -\dot{\lambda}_1 = x_1 = 0 & \quad \frac{d^4}{dt^4}H_u = \dot{x}_2 = u = 0 \end{aligned}$$

por consiguiente se concluye que $x_1 = 0$ y de manera idéntica el control $u = 0$, por lo que este es un problema de control singular resuelto

Además observemos que la condición de Kelley es satisfecha, ya que:

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{2k} H_u \right] = 1 > 0, \quad \text{con } k = 2$$

En la siguiente sección se mostrará la conexión existente de control singular óptimo, con el control por modos deslizantes.

2.5.1. Control Óptimo Singular en Sistemas Lineales mimo

Consideremos el costo cuadrático dado por

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T Q x) dt \quad (2.5.2)$$

Donde (2.5.2) está sujeto al siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

Entonces el Hamiltoniano puede escribirse como

$$H(x, \lambda, u) = \frac{1}{2} x^T Q x + \lambda^T (Ax + Bu)$$

Entonces para encontrar el control óptimo aplicamos la condición $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ y se obtiene que

$$\lambda^T B = 0$$

Por consiguiente éste es un caso de control singular debido a que $H_u = 0$ no proporciona información útil para dar una solución completa para minimizar a (2.5.2)

A continuación propondremos una transformación T no singular tal que $z = Tx$ dada por

$$T = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-m \times n-m} & -B_1 B_2^{-1} \\ 0_{m \times n-m} & B_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (2.5.3)$$

donde $B_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, además para que T exista, notemos que la inversa de B_2 debe de existir.

De esta forma tendremos que T^{-1} está dada por:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-m \times n-m} & B_1 \\ 0_{m \times n-m} & B_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5.4)$$

Entonces el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales en variables de z es dado por:

$$\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu$$

donde se obtiene que

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad y \quad TB = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{I}_{m \times m} \end{pmatrix}$$

Ahora por haber aplicado la transformación T al sistema original, el nuevo sistema en variables de z puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= A_{11}\bar{z}_1 + A_{12}\bar{z}_2 \\ \dot{\bar{z}}_2 &= A_{21}\bar{z}_1 + A_{22}\bar{z}_2 + u \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

donde se está considerando que la nueva variable z es particionada de tal manera que $z = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)^T$ con $\bar{z}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ y $\bar{z}_2 \in \mathbb{R}^m$

Puesto que T es no singular entonces $x = T^{-1}z$ y sustituyendo en (2.5.2) entonces el funcional transformado es de la forma

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} dt \quad (2.5.6)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} \end{pmatrix} = (T^{-1})^T Q T^{-1}$$

por lo que desarrollando a (2.5.6) y simplificando tenemos

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (\bar{z}_1^T \bar{Q}_{11} \bar{z}_1 + 2\bar{z}_1^T \bar{Q}_{12} \bar{z}_2 + \bar{z}_2^T \bar{Q}_{22} \bar{z}_2) dt \quad (2.5.7)$$

introducimos la variable $v = \bar{z}_2 + L\bar{z}_1$ o bien $\bar{z}_2 = v - L\bar{z}_1$ en (2.5.7) . Entonces se tiene

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \{ \bar{z}_1^T (\bar{Q}_{11} - 2\bar{Q}_{12}L + L^T \bar{Q}_{22}L) \bar{z}_1 + \bar{z}_1^T (2\bar{Q}_{12} - 2L^T \bar{Q}_{22}L) v + v^T \bar{Q}_{22}v \} dt$$

con el fin de eliminar términos cruzados L es seleccionado como $L = \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T$ de esta forma el funcional queda como

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (\bar{z}_1^T \bar{Q}_1 \bar{z}_1 + v^T \bar{Q}_{22}v) dt \quad (2.5.8)$$

$$\bar{Q}_1 := \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T$$

donde (2.5.8) está sujeto al sistema de ecuaciones diferenciales reducido

$$\dot{\bar{z}}_1 = (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) \bar{z}_1 + A_{12}v. \quad (2.5.9)$$

En este caso observemos que la variable v toma el papel de variable de control virtual. Por consiguiente la minimización de (2.5.8) sujeto a (2.5.9) ya no constituye un problema de control singular debido a que la función hamiltoniana $H_1(\bar{z}_1, \lambda_1, v)$ estará dada por

$$H_1(\bar{z}_1, \lambda_1, v) = \frac{1}{2} (\bar{z}_1^T \bar{Q}_1 \bar{z}_1 + v^T \bar{Q}_{22}v) + \lambda_1^T \{ (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) \bar{z}_1 + A_{12}v \}$$

Y tenemos que

$$\dot{\bar{z}}_1 = \frac{\partial H_1(\bar{z}_1, \lambda_1, v)}{\partial \lambda_1^T} = (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) \bar{z}_1 + A_{12}v$$

$$\dot{\lambda}_1^T = -\frac{\partial H_1(\bar{z}_1, \lambda_1, v)}{\partial \bar{z}_1} = -\bar{z}_1^T \bar{Q}_1 - \lambda_1^T (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) \text{ con } \lambda_1(T) = 0$$

donde el sistema anterior se puede escribir en representación matricial como:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\lambda}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) & 0 \\ -\bar{Q}_1 & -(A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{12} \\ 0 \end{pmatrix} v \quad (2.5.10)$$

y junto con la condición de minimización para el funcional tenemos que:

$$\frac{\partial H_1(\bar{z}_1, \lambda_1, v)}{\partial v} = 0$$

lo cual implica que la condición de Óptimalidad está dada por:

$$v^T \bar{Q}_{22} + \lambda_1^T A_{12} = 0_{1 \times m}$$

realizando la transpuesta en la expresión de Óptimalidad anterior tenemos:

$$\bar{Q}_{22} v + A_{12}^T \lambda_1 = 0_{m \times 1} \quad (2.5.11)$$

Puesto que \bar{Q}_{22} es invertible y además definida positiva tenemos que v de (2.5.11) está dada por:

$$v = -\bar{Q}_{22}^{-1} (A_{12})^T \lambda_1 \quad (2.5.12)$$

donde v dado en (2.5.12) representa el control virtual óptimo. Además si se sustituye este control en (2.5.10) tendremos como resultado un *Sistema de Ecuaciones Diferenciales Óptimo* (2.5.13), debido a que las soluciones Óptimas λ_1 y \bar{z}_1 estarán definidas al momento de resolver este sistema de ecuaciones diferenciales resultante, el cual es presentado a continuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\lambda}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) & -A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} A_{12}^T \\ -\bar{Q}_1 & -(A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (2.5.13)$$

A continuación del control virtual óptimo v dado en (2.5.12) se puede diseñar un vector $S \in \mathbb{R}^m$ el cual estará compuesto por m superficies deslizantes S_i $i = 1, 2, \dots, m$, es decir $S = (S_1, S_2, \dots, S_m)^T$. Entonces el diseño de S estará dado por:

$$S = v + \bar{Q}_{22}^{-1} (A_{12})^T \lambda_1$$

Notemos que el vector S alcanza su óptimo una vez que $S = 0$.

Además debido a que $v = \bar{z}_2 + \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1$ tenemos que S también puede escribirse como

$$S = \bar{z}_2 + \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1 + \bar{Q}_{22}^{-1} (A_{12})^T \lambda_1$$

Pero para poder decir que el vector $S = 0$ es óptimo, necesitamos encontrar λ_1 óptimo. Para hacer esto, proponemos $\lambda_1(t) = P(t) z_1(t)$ con $P(t) = P(t)^T$, $P(t) > 0$ donde al sustituir la propuesta de λ_1 en (2.5.13) tendremos que el sistema de ecuaciones diferenciales óptimo está dado por

$$\dot{\bar{z}}_1 = -A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} A_{12}^T P(t) \bar{z}_1 + (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) \bar{z}_1 \quad (2.5.14)$$

$$\dot{P}(t) \bar{z}_1 + P(t) \dot{\bar{z}}_1 = - (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T)^T P(t) \bar{z}_1 - \bar{Q}_1 \bar{z}_1 \quad (2.5.15)$$

entonces multiplicando a (2.5.14) por la izquierda con $-P(t)$ y sumando con la ecuación (2.5.15) obtenemos:

$$\dot{P}(t) \bar{z}_1 = - (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T)^T P(t) \bar{z}_1 - \bar{Q}_1 \bar{z}_1 + P(t) A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} A_{12}^T P(t) \bar{z}_1 - P(t) (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) \bar{z}_1$$

entonces agrupando términos y factorizando por la derecha con \bar{z}_1 tenemos

$$\left(-\dot{P}(t) - (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T)^T P(t) - P(t) (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) + P(t) A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} A_{12}^T P(t) - \bar{Q}_1 \right) \bar{z}_1 = 0$$

Pero sabemos que \bar{z}_1 no es cero para todo intervalo de tiempo por consiguiente:

$$-\dot{P}(t) - (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T)^T P(t) - P(t) (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) + P(t) A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} A_{12}^T P(t) - \bar{Q}_1 = 0$$

Por tanto tenemos que:

$$-\dot{P}(t) = P(t) (A_{11} - A_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T) + (A_{11} - A_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T)^T P(t) - P(t)A_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}A_{12}^T P(t) + \bar{Q}_1 \quad (2.5.16)$$

y se tiene que (2.5.16) es la conocida **Ecuación Diferencial de Riccati** vista en la siguiente sección. Además si consideramos que $\dot{P}(t) = 0$. Entonces $P(t) = P = \text{constante } \forall t$ y tendremos

$$P (A_{11} - A_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T) + (A_{11} - A_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T)^T P - PA_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}A_{12}^T P + \bar{Q}_1 = 0 \quad (2.5.17)$$

Donde (2.5.17) corresponde a la **Ecuación Matricial de Riccati** muy conocida en la literatura de Control Automático, donde encontrar la solución de la matriz simétrica P que satisfaga (2.5.17) es equivalente a resolver el problema de regulación lineal cuadrático, es decir se busca tener soluciones estables para el vector de estados \bar{z}_1 , y que a su vez minimicen el costo cuadrático (2.5.8).

Para ver esto recordemos que $\lambda_1(t) = P(t)\bar{z}_1(t)$, además tenemos que la condición de frontera de λ_1 está dada por $\lambda_1(T) = 0$, ahora supongamos que $T \rightarrow \infty$. Entonces la condición de frontera se sigue manteniendo, es decir $\lambda_1(\infty) = 0$. Por tanto $\lambda_1(\infty) = P(\infty)\bar{z}_1(\infty) = 0$, pero $P(t) = \text{constante} \neq 0 \forall t$.

Entonces tendremos que las soluciones $\bar{z}_1(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ que corresponden a soluciones asintóticamente estables.

Entonces en consecuencia a lo visto previamente tenemos que la minimización del funcional

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\bar{z}_1^T \bar{Q}_1 \bar{z}_1 + v^T \bar{Q}_{22} v) dt$$

$$\bar{Q}_1 := \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T$$

se encuentra sujeto a un sistema de ecuaciones reducido

$$\dot{\bar{z}}_1 = (A_{11} - A_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T) \bar{z}_1 + A_{12}v$$

Donde el control virtual óptimo está dado por

$$v = -\bar{Q}_{22}^{-1}A_{12}^T P \bar{z}_1$$

O bien debido a que se consideró que $v = \bar{z}_2 + \bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1$, el control virtual óptimo puede escribirse como

$$\bar{z}_2 + \bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1 = -\bar{Q}_{22}^{-1}A_{12}^T P \bar{z}_1.$$

Donde P es solución de la ecuación matricial de Riccati

$$P (A_{11} - A_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T) + (A_{11} - A_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T)^T P - PA_{12}\bar{Q}_{22}^{-1}A_{12}^T P + \bar{Q}_1 = 0$$

por tanto puede diseñarse un vector $S \in \mathbb{R}^m$ con m superficies deslizantes dado por

$$S = \bar{z}_2 + \bar{Q}_{22}^{-1}\bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1 + \bar{Q}_{22}^{-1}A_{12}^T P \bar{z}_1$$

O en forma simplificada como

$$S = \bar{z}_2 + \bar{Q}_{22}^{-1} (\bar{Q}_{12}^T + A_{12}^T P) \bar{z}_1$$

En consecuencia una vez que la matriz P es encontrada con la finalidad de garantizar la minimización del funcional, tenemos que cuando $S = 0$ se habrá logrado obtener las soluciones óptimas, que a su vez como se demostró anteriormente estas soluciones serán asintóticamente estables. Hasta ahora solo se ha mencionado cuando $S = 0$, sin embargo no se ha dicho como pensamos lograr esto, la respuesta se encuentra en derivar a S con respecto al tiempo y sustituir $\dot{\bar{z}}_1$ y $\dot{\bar{z}}_2$ de (2.5.5) en \dot{S} , Entonces tenemos que

$$\dot{S} = A_{1S} \bar{z}_1 + A_{2S} \bar{z}_2 + u \quad (2.5.18)$$

Donde $A_{1S} = (A_{21} + M A_{11})$, $A_{2S} = (A_{22} + M A_{12})$ con $M = \bar{Q}_{22}^{-1} (\bar{Q}_{12}^T + A_{12}^T P)$.

Y por consiguiente notemos que para resolver problemas de estabilización, el control vectorial u debe ser capaz de lograr que S y \dot{S} converjan a cero, y que puedan seguir manteniéndose en cero al paso del tiempo.

Diseño del control vectorial u para resolver problemas de estabilización singular óptima en sistemas mimo

A continuación se propone un control vectorial tal como se describe en el libro de ([73]), luego en breve se dará una descripción y sus consecuencias, seguido de un ejemplo de simulación.

Si se propone a $u = -A_{1S} \bar{z}_1 - A_{2S} \bar{z}_2 - KS$ y sustituyendo en (2.5.18) tendremos

$$\dot{S} = -KS$$

cuya solución está dada por

$$S = \exp(-Kt) S(0)$$

donde se tiene que $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ debe ser una matriz definida positiva, de esta manera tendremos que las m superficies deslizantes de S convergerán asintóticamente a cero.

El problema de utilizar este tipo de control vectorial radica en el hecho de que no es eficiente compensando perturbaciones desconocidas, que en un momento determinado puedan llegar afectar las dinámicas del sistema a controlar. Por lo que no es recomendable utilizarlo en sistemas que puedan ser afectados por disturbios. Enseguida se mostrarán dos ejemplos que apoyarán este hecho. Primeramente se realizará un ejemplo de simulación para un sistema que no presenta perturbación, y posteriormente cuando éste sí las presenta. Con el fin de apreciar las diferencias del comportamiento de las soluciones respecto a cada ejemplo de simulación.

Ejemplo 10. A continuación se muestra un ejemplo de simulación donde se quiere estabilizar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 7 & -3 \\ 2 & 8 & -9 & 4 \\ 9 & 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.5.19)$$

con condiciones iniciales $x(0) = (5, 3, -3, -5)^T$, donde tenemos que $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ y $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, y teniendo en cuenta que $B_1 = (2, -3, 1)$, $B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ con B_2 invertible, entonces utilizaremos la transformación T y T^{-1} expresadas en (2.5.3) y (2.5.4) respectivamente, con el fin de transformar el sistema original (2.5.19) a un nuevo sistema en variables de z .

Por tanto la matriz de transformación T y su inversa T^{-1} están dadas por:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{118}{129} & \frac{47}{129} & \frac{104}{129} \\ 0 & \frac{47}{258} & -\frac{11}{129} & -\frac{13}{258} \\ 0 & -\frac{31}{258} & \frac{10}{129} & \frac{47}{258} \\ 0 & \frac{49}{258} & \frac{5}{129} & -\frac{41}{258} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5.20)$$

y por consiguiente el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu$ estará expresado como:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1310}{129} & \frac{6306}{43} & \frac{3530}{129} & -\frac{428}{43} \\ -\frac{67}{258} & -\frac{1401}{86} & \frac{376}{129} & \frac{935}{86} \\ \frac{401}{258} & \frac{1043}{86} & -\frac{1022}{129} & -\frac{205}{86} \\ -\frac{251}{258} & -\frac{317}{86} & \frac{1037}{129} & \frac{177}{86} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.5.21)$$

y con condiciones iniciales $z(0) = Tx(0) = \left(-\frac{370}{129}, \frac{136}{129}, -\frac{194}{129}, \frac{161}{129} \right)^T$.

Por consiguiente (2.5.21) se puede descomponer como:

$$\dot{\bar{z}}_1 = A_{11}\bar{z}_1 + A_{12}\bar{z}_2$$

$$\dot{\bar{z}}_2 = A_{21}\bar{z}_1 + A_{22}\bar{z}_2 + u$$

Donde $\bar{z}_1 = z_1$, $\bar{z}_2 = (z_2, z_3, z_4)^T$, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ donde:

$$A_{11} = \frac{1310}{129}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} \frac{6306}{43}, & \frac{3530}{129}, & -\frac{428}{43} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -\frac{67}{258}, & \frac{401}{258}, & -\frac{251}{258} \end{pmatrix}^T, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -\frac{1401}{86} & \frac{376}{129} & \frac{935}{86} \\ \frac{1043}{86} & -\frac{1022}{129} & -\frac{205}{86} \\ -\frac{317}{86} & \frac{1037}{129} & \frac{177}{86} \end{pmatrix}$$

A continuación para estabilizar a (2.5.21) recurriremos a la minimización de un funcional cuadrático en términos de las variables originales x . Es decir

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x) dt \quad (2.5.22)$$

con $Q = Q^T > 0$ dado por

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 & 5 \\ 12 & 46 & -31 & 3 \\ -8 & -31 & 30 & -11 \\ 5 & 3 & -11 & 45 \end{pmatrix}$$

Entonces al aplicar la transformación T y T^{-1} de (2.5.20) al funcional (2.5.22), tendremos que el nuevo funcional en variables de z estará expresado por

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (z^T \bar{Q} z) dt \quad (2.5.23)$$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} \end{pmatrix} = (T^{-1})^T Q T^{-1}$$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 4 & 125 & 26 & -21 \\ 125 & 5069 & 1231 & -1412 \\ 26 & 1231 & 1158 & -265 \\ -21 & -1412 & -265 & 717 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Q}_{11} = 4, \bar{Q}_{12} = (125, 26, -21)$$

$$\bar{Q}_{21} = (125, 26, -21)^T, \bar{Q}_{22} = \begin{pmatrix} 5069 & 1231 & -1412 \\ 1231 & 1158 & -265 \\ -1412 & -265 & 717 \end{pmatrix}$$

Por lo que sustituyendo \bar{Q} en (2.5.23) y desarrollando tenemos

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} (\bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{11} \bar{z}_1(t) + 2\bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{12} \bar{z}_2 + \bar{z}_2^T(t) \bar{Q}_{22} \bar{z}_2(t)) dt \quad (2.5.24)$$

Y como se mencionó anteriormente sustituyendo \bar{z}_2 de la variable $v = \bar{z}_2 + \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1$ en (2.5.24) tendremos que se han eliminado términos cruzados obteniendo de esta manera

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\bar{z}_1^T \bar{Q}_1 \bar{z}_1 + v^T \bar{Q}_{22} v) dt$$

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T$$

$$\bar{Q}_1 = 0.4126$$

y donde la minimización del funcional está sujeto al sistema reducido

$$\dot{\bar{z}}_1 = (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) \bar{z}_1 + A_{12} v$$

del control virtual óptimo está dado por

$$v = -\bar{Q}_{22}^{-1} A_{12}^T P \bar{z}_1$$

Donde P es solución de la ecuación matricial de Riccati

$$P(A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T) + (A_{11} - A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T)^T P - P A_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} A_{12}^T P + \bar{Q}_1 = 0$$

por tanto tomando en cuenta que $\bar{z}_2 = v - \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1$ puede diseñarse un vector $S \in \mathbb{R}^3$ con tres superficies deslizantes dadas por

$$S = \bar{z}_2 + \bar{Q}_{22}^{-1} (\bar{Q}_{12}^T + A_{12}^T P) \bar{z}_1 \quad (2.5.25)$$

y al derivar con respecto al tiempo a S se tiene que

$$\dot{S} = A_{1S} \bar{z}_1 + A_{2S} \bar{z}_2 + u \quad (2.5.26)$$

$$A_{1S} = (A_{21} + M A_{11}), A_{2S} = (A_{22} + M A_{12}) \text{ con } M = \bar{Q}_{22}^{-1} (\bar{Q}_{12}^T + A_{12}^T P)$$

utilizando Matlab calculamos que:

$$M = \begin{pmatrix} 0.1258 \\ -0.0351 \\ 0.1857 \end{pmatrix}, A_{1S} = \begin{pmatrix} 1.0179 \\ 1.1983 \\ 0.9129 \end{pmatrix}, A_{2S} = \begin{pmatrix} 2.1597 & 6.3575 & 9.6198 \\ 6.9869 & -8.8818 & -2.0348 \\ 23.5467 & 13.1202 & 0.2098 \end{pmatrix}$$

con el fin de que las superficies tiendan asintóticamente a cero se propone un control vectorial u dado por

$$u = -A_{1S} \bar{z}_1 - A_{2S} \bar{z}_2 - KS \quad (2.5.27)$$

por lo que tendremos que al sustituir u en (2.5.26) obtenemos

$$\dot{S} = -KS$$

y sus soluciones estarán dadas por

$$S = \exp(-Kt)S(0)$$

con la matriz $K \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definida positiva, por simplicidad de simulación seleccionamos a K como:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Enseguida se muestran los resultados de simulación de las dinámicas del sistema transformado $z = Tx$, las tres superficies deslizantes componentes del vector $S = (S_1, S_2, S_3)^T$, y los tres controles que componen a $u = (u_1, u_2, u_3)^T$. Donde estas figuras están representadas en (2.5.1), (2.5.2) y (2.5.3) respectivamente.

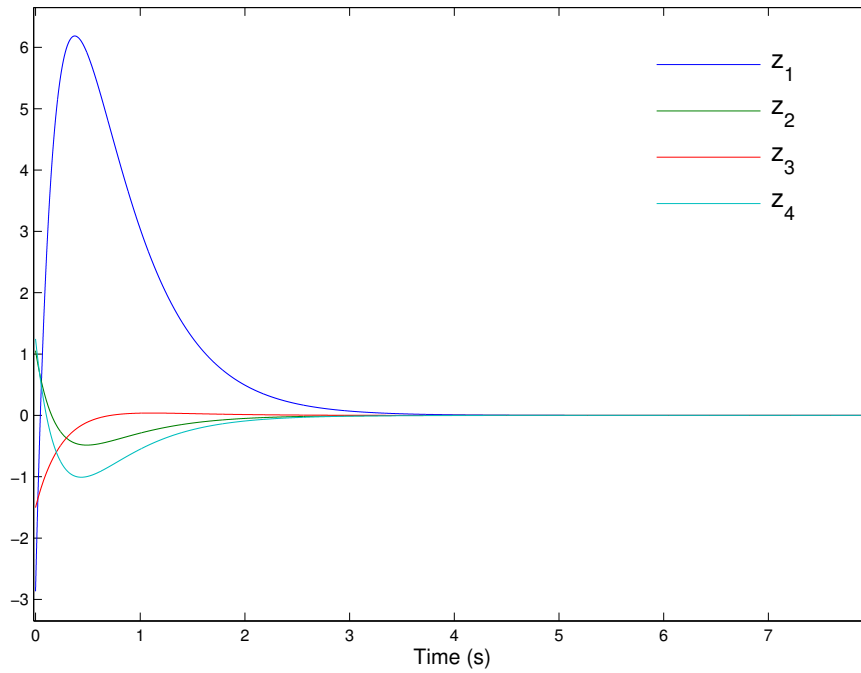


Figura 2.5.1: Dinámicas $z = Tx$

En figura (2.5.1) se muestran las soluciones del sistema transformado convergiendo a cero de forma asintótica.

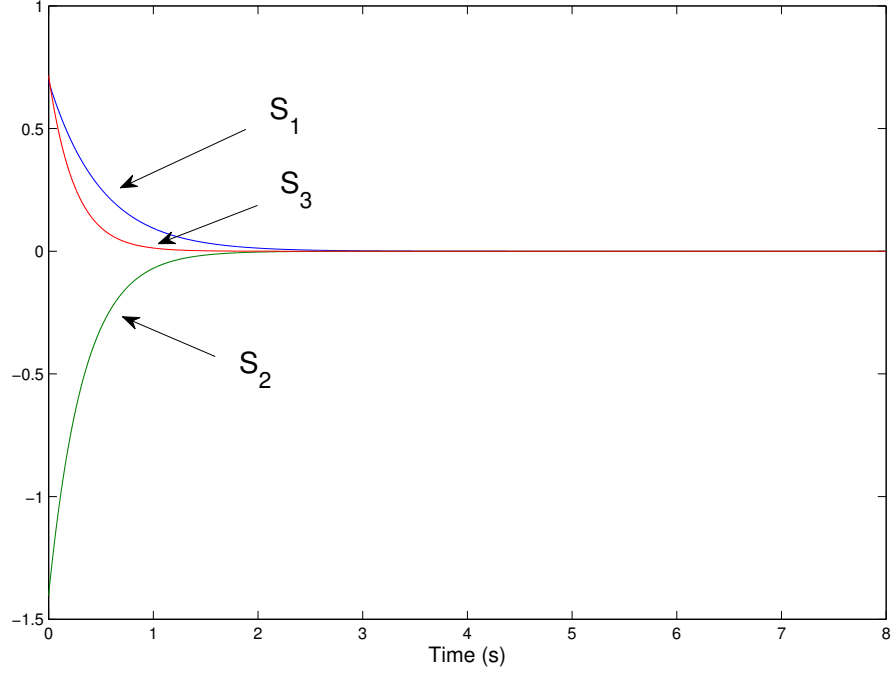


Figura 2.5.2: Superficies deslizantes $S = \bar{z}_2 + M \bar{z}_1$

En figura (2.5.2) vemos que las dinámicas de las superficies deslizantes S_1, S_2 y S_3 convergen a cero de forma asintótica.

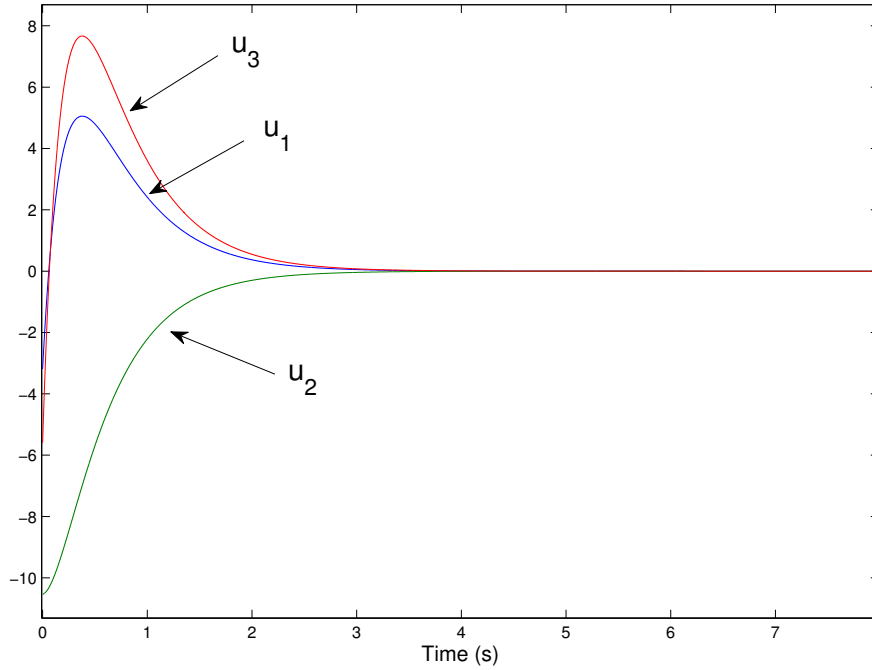


Figura 2.5.3: Control vectorial $u = -A_{1S}\bar{z}_1 - A_{2S}\bar{z}_2 - KS$

En figura (2.5.3) se muestra a los controles u_1, u_2 y u_3 que decaen de forma exponencial a cero debido a que están siendo retroalimentados con las variables de z

Ejemplo 11. A continuación se realizará un ejemplo de simulación considerando el mismo sistema dado en el ejemplo (10) pero en esta ocasión este sistema presentará algún disturbio desconocido, que puede considerarse como alguna fuerza interna o externa al sistema, pero por fines de simulación consideraremos que conocemos tales fuerzas las cuales son denotadas por ξ_i , que serán las componentes de un vector de perturbación ξ .

Consideremos que el sistema (2.5.19) está siendo perturbado por el vector ξ . Entonces el sistema estará ahora representado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 7 & -3 \\ 2 & 8 & -9 & 4 \\ 9 & 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \right) \quad (2.5.28)$$

Con condiciones iniciales $x(0) = (5, 3, -3, -5)^T$, y un vector de perturbación ξ dado por

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(1 + \exp(-2x_1t)) \\ 2 \cos(3x_1 + x_2) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

y con la transformación T y T^{-1} utilizadas anteriormente obtenemos que $\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu$ está dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1310}{129} & \frac{6306}{43} & \frac{3530}{129} & -\frac{428}{43} \\ -\frac{67}{258} & -\frac{1401}{86} & \frac{376}{129} & \frac{935}{86} \\ \frac{401}{258} & \frac{1043}{86} & -\frac{1022}{129} & -\frac{205}{86} \\ -\frac{251}{258} & -\frac{317}{86} & \frac{1037}{129} & \frac{177}{86} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \right).$$

donde las condiciones iniciales en variables de z están dadas por $z(0) = Tx(0) = \left(-\frac{370}{129}, \frac{136}{129}, -\frac{194}{129}, \frac{161}{129} \right)^T$.

Si aplicamos el control vectorial lineal $u = -A_{1S} \bar{z}_1 - A_{2S} \bar{z}_2 - K S$ tenemos que las soluciones de z no son asintóticamente estables, esto es visible en los resultados de simulación de las dinámicas de z , el cual se muestra en la figura (2.5.4).

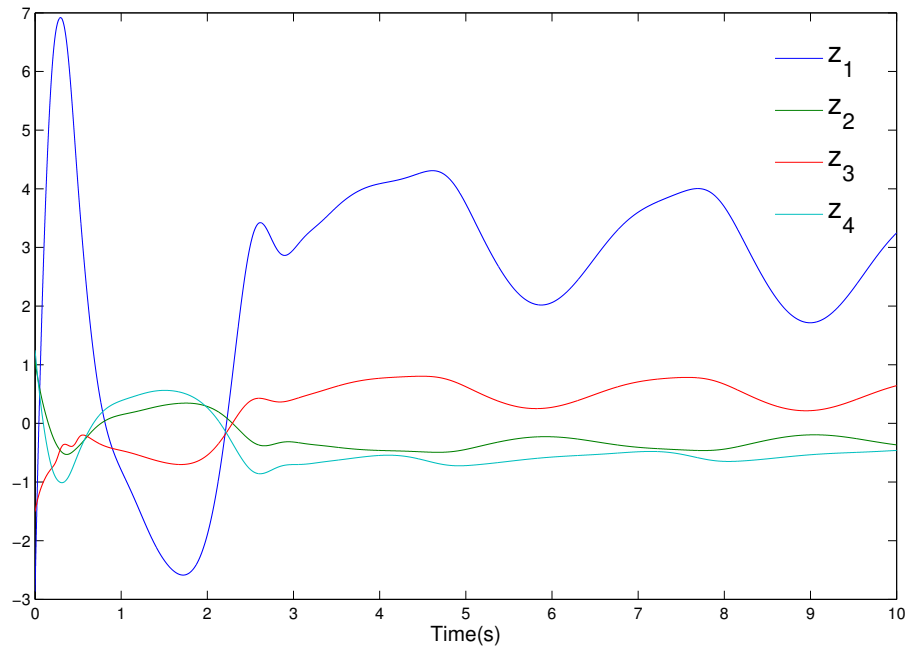


Figura 2.5.4: dinámicas de z

Además notemos que el resultado anterior se debe principalmente a que el control lineal u es incapaz de lograr que las tres superficies deslizantes S_1, S_2 y S_3 que componen al vector S converjan a cero, esto es porque el control vectorial u no puede compensar las perturbaciones. Este hecho es apreciable en la figura (2.5.5)

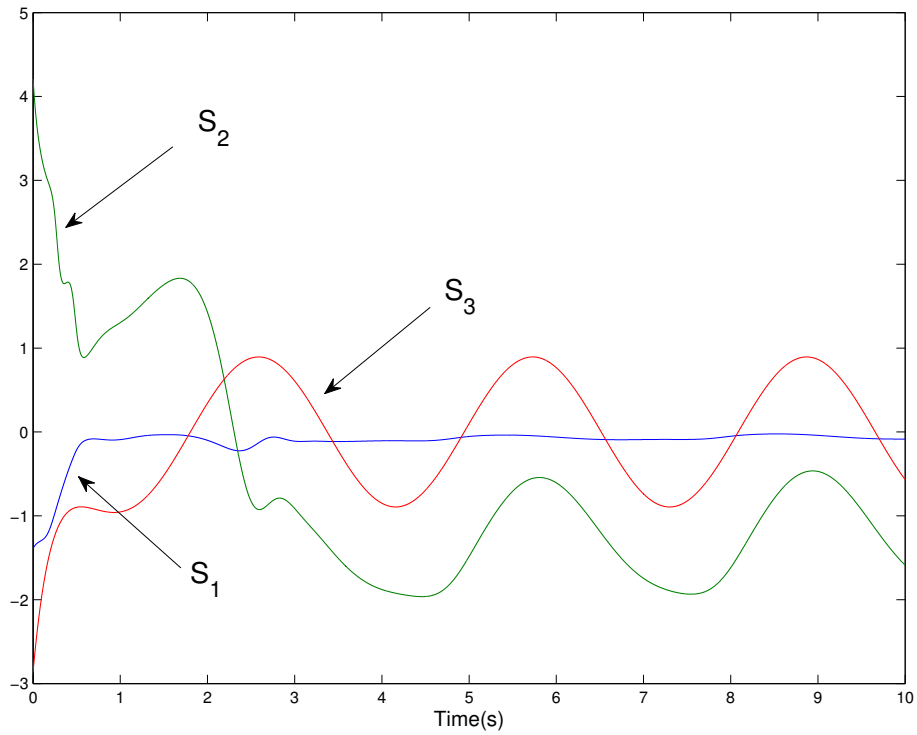


Figura 2.5.5: Superficies deslizantes

por tal motivo este tipo de control vectorial lineal u no es recomendable para aplicarse a un sistema que pueda presentar disturbios que afecten las dinámicas del sistema. En lo que sigue se diseñará un tipo de control vectorial u que si sea efectivo compensando perturbaciones, es decir este controlador a diseñarse será robusto ante perturbaciones e incertidumbres desconocidas que en un momento determinado puedan llegar a presentarse.

Diseño de un control vectorial u robusto mediante estabilidad de Lyapunov.

A continuación se procederá a diseñar un controlador basado en la teoría de los modos deslizantes, que sea capaz de compensar cualquier perturbación a presentarse en alguna aplicación de tiempo real, con la única condición de que podamos estimar la cota de cada disturbio o incertidumbre. Queriendo decir con esto que tales disturbios desconocidos no tiendan a crecer indefinidamente.

Para ver como se puede diseñar un tipo de control vectorial u , comencemos por describir un sistema lineal perturbado el cual está expresado por

$$\dot{x} = Ax + B(u + \xi)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^m$$

con $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^T$ donde de cada perturbación ξ_i solo se le pueda estimar su cota, es decir : $|\xi_i| \leq L_i$ para $i = 1, 2, \dots, m$, por tanto al aplicar la transformación T dada en (2.5.3) tendremos que el nuevo sistema $\dot{z} = TAT^{-1}z + TB(u + \xi)$ en variables de z puede escribirse como:

$$\dot{\bar{z}}_1 = A_{11}\bar{z}_1 + A_{12}\bar{z}_2$$

$$\dot{\bar{z}}_2 = A_{21}\bar{z}_1 + A_{22}\bar{z}_2 + \xi + u$$

donde la variable z está siendo particionada en dos variables vectoriales $\bar{z}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ y $\bar{z}_2 \in \mathbb{R}^m$, es decir $z = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)^T$.

Donde utilizando el enfoque de optimización a un funcional cuadrático dado por

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x) dt$$

y al aplicar la transformación T descrita en (2.5.3) obtenemos prácticamente los mismos resultados descritos con anterioridad, cuya única diferencia a mencionar es que tendremos que la derivada del vector $S \in \mathbb{R}^m$ con respecto al tiempo está expresada por

$$\dot{S} = A_{1S}\bar{z}_1 + A_{2S}\bar{z}_2 + \xi + u \tag{2.5.29}$$

donde el vector perturbativo ξ está presente en (2.5.29), debido a que el sistema original está siendo afectado por perturbaciones.

A continuación procederemos a diseñar un control vectorial u que se encargue de compensar cualquier perturbación ξ_i que afecte a nuestro sistema, además de que se encargue de hacer que S converja a cero, obteniendo así las condiciones de optimización para el funcional, así como las soluciones Óptimas \bar{z}_1 y \bar{z}_2 que minimicen dicho funcional.

Para hacer esto tomemos nuevamente el enfoque del diseño del control por modos deslizante, visto en la sección pasada, esto es tomemos en consideración una función escalar de Lyapunov $V(S) > 0$ candidata dada por

$$V(S) = \frac{1}{2} \|S\|^2 = \frac{1}{2} S^T S \tag{2.5.30}$$

donde $S = (S_1, S_2, \dots, S_m)^T$ y recordemos que para poder proveer de estabilidad asintótica global a (2.5.29) sobre el punto de equilibrio $S = 0$, las siguientes condiciones deben ser satisfechas:

(a) $\dot{V} < 0$ para $S \neq 0$

(b) $\lim_{\|S\| \rightarrow \infty} V = \infty$

Por consiguiente es claro que la condición b) es obviamente satisfecha por V en (2.5.30), ahora solo falta lograr que $\dot{V}(S) < 0$, Entonces tenemos que

$$\dot{V}(S) = S^T \dot{S}$$

y la propuesta clave para lograr que $\dot{V} < 0$ es la siguiente:

Consideremos que

$$\dot{V}(S) = S^T \dot{S} \leq -\alpha \sum_{i=1}^m |S_i| < 0 \quad \text{con } \alpha > 0 \quad (2.5.31)$$

Entonces tenemos que sustituyendo $\dot{S} = A_{1S}\bar{z}_1 + A_{2S}\bar{z}_2 + \xi + u$ en (2.5.31) tendremos

$$\dot{V}(S) = S^T (A_{1S}\bar{z}_1 + A_{2S}\bar{z}_2 + \xi + u) \leq -\alpha \sum_{i=1}^m |S_i| < 0$$

Ahora solo falta encontrar el control vectorial u que satisfaga $S^T \dot{S} = -\alpha \sum_{i=1}^m |S_i|$

para esto proponemos que:

$$u = -A_{1S}\bar{z}_1 - A_{2S}\bar{z}_2 + \tilde{u}$$

por tanto tendremos que

$$S^T (\xi + \tilde{u}) \leq -\alpha \sum_{i=1}^m |S_i| < 0$$

$$S^T \xi + S^T \tilde{u} \leq -\alpha \sum_{i=1}^m |S_i| < 0 \quad (2.5.32)$$

Donde propondremos que $\tilde{u} = (-\rho_1 \text{Sign}(S_1), -\rho_2 \text{Sign}(S_2), \dots, -\rho_m \text{Sign}(S_m))^T$. Ahora notemos que (2.5.32) puede escribirse de manera equivalente como:

$$(S_1, S_2, \dots, S_m) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} + (S_1, S_2, \dots, S_m) \begin{pmatrix} -\rho_1 \text{Sign}(S_1) \\ -\rho_2 \text{Sign}(S_2) \\ \vdots \\ -\rho_m \text{Sign}(S_m) \end{pmatrix} \leq -\alpha \sum_{i=1}^m |S_i| < 0$$

Desarrollando y simplificando tenemos que:

$$S_1 \xi_1 + S_2 \xi_2 + \dots + S_m \xi_m - \rho_1 |S_1| - \rho_2 |S_2| - \dots - \rho_m |S_m| \leq -\alpha \sum_{i=1}^m |S_i| < 0 \quad (2.5.33)$$

puesto que lo único que sabemos es que las perturbaciones ξ_i están acotadas. Tenemos que:

$$S_1 \xi_1 + S_2 \xi_2 + \dots + S_m \xi_m - \rho_1 |S_1| - \rho_2 |S_2| - \dots - \rho_m |S_m| \leq \\ |S_1| L_1 + |S_2| L_2 + \dots + |S_m| L_m - \rho_1 |S_1| - \rho_2 |S_2| - \dots - \rho_m |S_m|$$

Y agrupando términos en común e igualando con la parte derecha de la desigualdad (2.5.33) tenemos:

$$(L_1 - \rho_1) |S_1| + (L_2 - \rho_2) |S_2| + \cdots + (L_m - \rho_m) |S_m| = -\alpha |S_1| - \alpha |S_2| - \cdots - \alpha |S_m|$$

Por consiguiente estas dos expresiones son iguales si y sólo si

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \alpha + L_1 \\ \rho_2 &= \alpha + L_2 \\ &\vdots \\ \rho_m &= \alpha + L_m\end{aligned}\tag{2.5.34}$$

donde (2.5.34) representa los valores necesarios para que el control \tilde{u} pueda compensar las perturbaciones. Por todo lo anterior tenemos que el control u que logra que $S \rightarrow 0$ y $\dot{S} \rightarrow 0$ en presencia de disturbios está dado por

$$u = -A_{1S}\bar{z}_1 - A_{2S}\bar{z}_2 + \tilde{u}$$

con

$$\tilde{u} = - \begin{pmatrix} (\alpha + L_1) \text{Sign}(S_1) \\ (\alpha + L_2) \text{Sign}(S_2) \\ \vdots \\ (\alpha + L_m) \text{Sign}(S_m) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha + L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha + L_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha + L_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Sign}(S_1) \\ \text{Sign}(S_2) \\ \vdots \\ \text{Sign}(S_m) \end{pmatrix}$$

Donde observemos que cada S_i puede ser calculada fácilmente haciendo

$$\begin{aligned}S_1 &= (1, 0, \dots, 0_m) S \\ S_2 &= (0, 1, \dots, 0_m) S \\ &\vdots \\ S_m &= (0, 0, \dots, 1_m) S\end{aligned}$$

De esta manera al sustituir el control vectorial $u = -A_{1S}\bar{z}_1 - A_{2S}\bar{z}_2 + \tilde{u}$ en (2.5.29) se tiene que

$$\dot{S} = - \begin{pmatrix} \alpha + L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha + L_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha + L_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Sign}(S_1) \\ \text{Sign}(S_2) \\ \vdots \\ \text{Sign}(S_m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}\tag{2.5.35}$$

O bien debido a que $\dot{S} = (\dot{S}_1, \dot{S}_2, \dots, \dot{S}_m)^T$ tenemos que (2.5.35) puede reescribirse como:

$$\begin{pmatrix} \dot{S}_1 \\ \dot{S}_2 \\ \vdots \\ \dot{S}_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha + L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha + L_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha + L_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Sign}(S_1) \\ \text{Sign}(S_2) \\ \vdots \\ \text{Sign}(S_m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

Entonces finalmente tendremos que:

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= -(\alpha + L_1) \text{Sign}(S_1) + \xi_1 \\ \dot{S}_2 &= -(\alpha + L_2) \text{Sign}(S_2) + \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{S}_m &= -(\alpha + L_m) \text{Sign}(S_m) + \xi_m\end{aligned}$$

A continuación consideremos el ejemplo (11), pero en esta ocasión se utilizará este tipo de control robusto que se acaba de diseñar con la ayuda de la función candidata de Lyapunov dada en (2.5.30).

Ejemplo 12. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales del ejemplo (11) el cual es afectado por dinámicas perturbativas. Entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 7 & -3 \\ 2 & 8 & -9 & 4 \\ 9 & 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \right)$$

Con condiciones iniciales $x(0) = (5, 3, -3, -5)^T$, y un vector perturbativo ξ dado por

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(1 + \exp(-2x_1 t)) \\ 2 \cos(3x_1 + x_2) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} |\xi_1| \leq 1 \\ |\xi_2| \leq 2 \\ |\xi_3| \leq 1 \end{matrix} \quad (2.5.36)$$

Además tomando en consideración las transformaciones T y T^{-1} dadas en (2.5.20) tenemos que $\dot{z} = TAT^{-1}z + TB(u + \xi)$ es dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1310}{129} & \frac{6306}{43} & \frac{3530}{129} & -\frac{428}{43} \\ -\frac{67}{258} & -\frac{1401}{86} & \frac{376}{129} & \frac{935}{86} \\ \frac{401}{258} & \frac{1043}{86} & -\frac{1022}{129} & -\frac{205}{86} \\ -\frac{251}{258} & -\frac{317}{86} & \frac{1037}{129} & \frac{177}{86} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \right).$$

donde las condiciones iniciales en variables de z es $z(0) = Tx(0) = \left(-\frac{370}{129}, \frac{136}{129}, -\frac{194}{129}, \frac{161}{129} \right)^T$.

A continuación se procederá a mostrar las simulaciones correspondientes al caso perturbativo.

Puesto que anteriormente en ejemplo (10) ya tenemos todas las ganancias tanto del funcional J a minimizar, así como la forma y las ganancias del vector $S \in \mathbb{R}^3$ dado en (2.5.25), entonces tenemos que cuando el sistema (2.5.19) es afectado por perturbaciones, la única diferencia a considerar es que en \dot{S} aparecerá el vector de perturbación $\xi \in \mathbb{R}^3$, esto es:

$$\dot{S} = A_{1S}\bar{z}_1 + A_{2S}\bar{z}_2 + \xi + u$$

Entonces solo hace falta escribir el diseño del vector u .

Pero como se demostró anteriormente utilizando la función candidata de Lyapunov $V(S) = \frac{1}{2}\|S\|^2$ podemos diseñar un control vectorial u que proveerá de estabilidad a S y \dot{S} alrededor del punto de equilibrio $S = 0$.

Donde el control a diseñarse está dado por:

$$u = -A_{1S}\bar{z}_1 - A_{2S}\bar{z}_2 + \tilde{u}.$$

Donde las matrices A_{1S} y A_{2S} calculadas anteriormente están dadas por

$$A_{1S} = \begin{pmatrix} 1.0179 \\ 1.1983 \\ 0.9129 \end{pmatrix}, A_{2S} = \begin{pmatrix} 2.1597 & 6.3575 & 9.6198 \\ 6.9869 & -8.8818 & -2.0348 \\ 23.5467 & 13.1202 & 0.2098 \end{pmatrix}$$

con \tilde{u} dado por

$$\tilde{u} = - \begin{pmatrix} (\alpha + L_1) \text{Sign}(S_1) \\ (\alpha + L_2) \text{Sign}(S_2) \\ \vdots \\ (\alpha + L_m) \text{Sign}(S_m) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha + L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha + L_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha + L_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Sign}(S_1) \\ \text{Sign}(S_2) \\ \vdots \\ \text{Sign}(S_m) \end{pmatrix}$$

Entonces para este ejemplo en particular tenemos que tanto la dimensión de \tilde{u} y la de ξ es 3, además tenemos que las cotas de cada componente ξ_i del vector ξ dado en (2.5.36) son $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $L_3 = 1$, y proponiendo $\alpha = 0.15$ llegamos a que \tilde{u} es dado por

$$\tilde{u} = - \begin{pmatrix} 1.15 & 0 & 0 \\ 0 & 2.15 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Sign}(S_1) \\ \text{Sign}(S_2) \\ \text{Sign}(S_3) \end{pmatrix}$$

con $S_1 = (1, 0, 0)S$, $S_2 = (0, 1, 0)S$ y $S_3 = (0, 0, 1)S$.

Enseguida mostramos los resultados de simulación al proponer el control vectorial u previamente diseñado, al haber considerado el criterio de estabilidad de Lyapunov. Donde cada una de las gráficas de simulación serán comentadas.

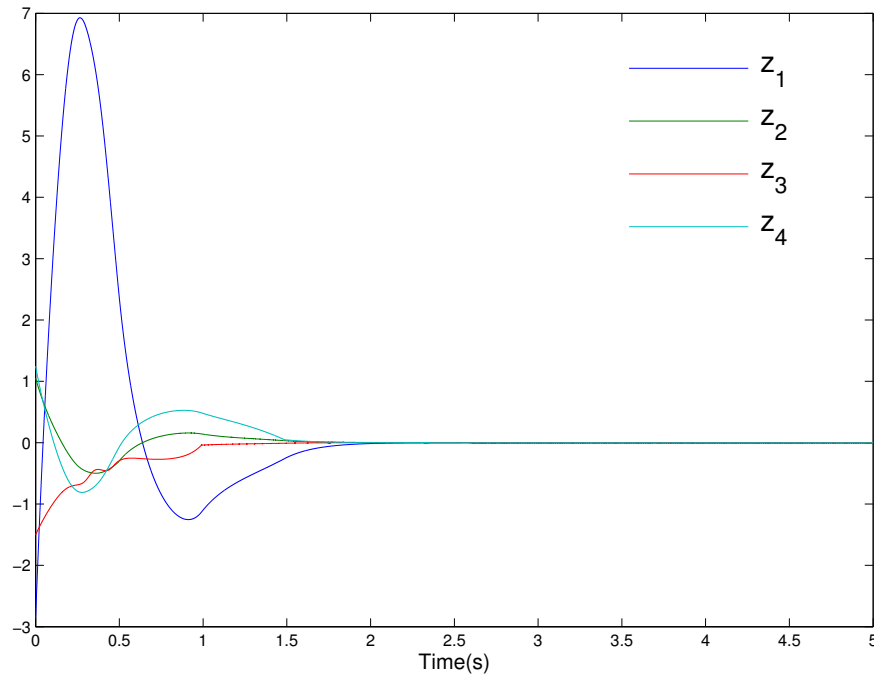


Figura 2.5.6: Dinámicas $z = Tx$

En la figura (2.5.6) vemos que las dinámicas de z convergen a cero, en forma asintótica.

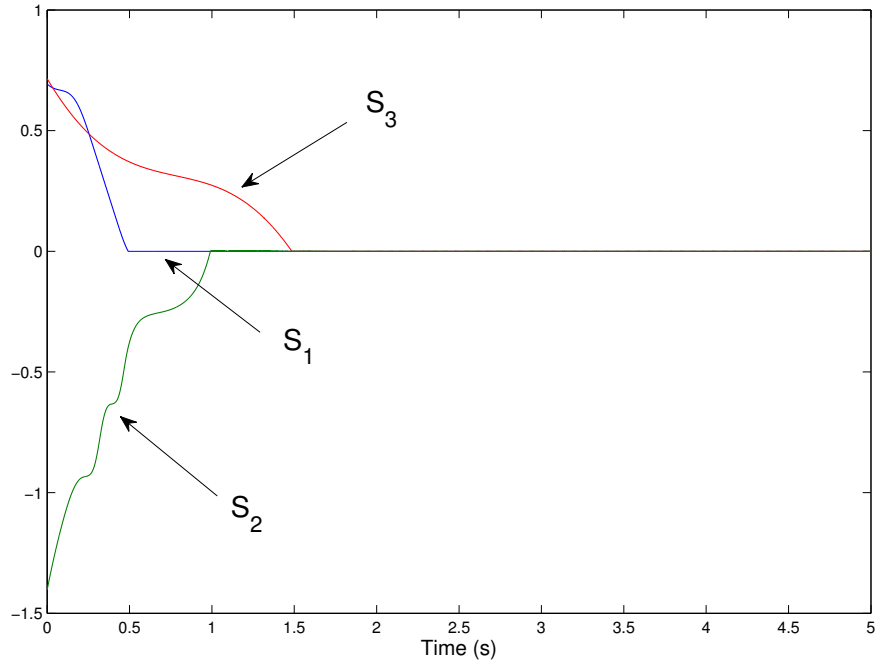


Figura 2.5.7: Vector de superficies deslizantes $S = \bar{z}_2 + M \bar{z}_1$

En la figura (2.5.7) se muestra cada una de las superficies deslizantes S_1, S_2 y S_3 convergiendo a cero.

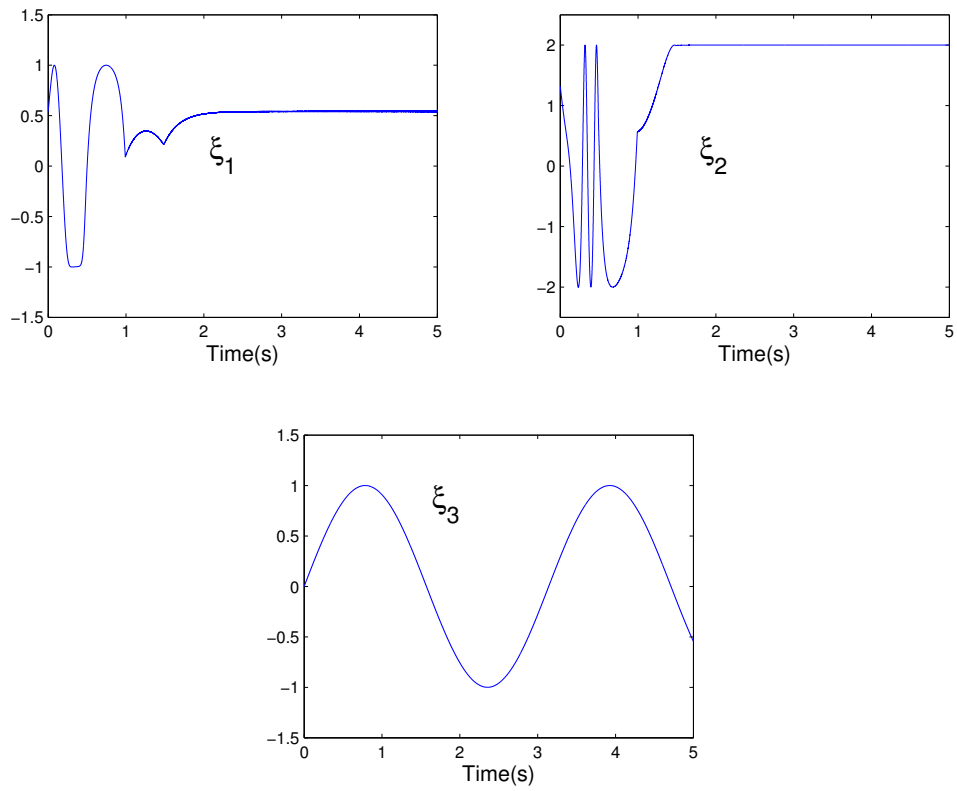


Figura 2.5.8: Perturbaciones ξ_1, ξ_2, ξ_3

En figura (2.5.8) se muestran las perturbaciones propuestas para esta simulación, aunque cabe mencionar que su naturaleza no es importante ya que el diseño del controlador vectorial u por estabilidad de Lyapunov solo considera el conocimiento estimado de la amplitud máxima que pueda llegar alcanzar cada una de las perturbaciones, por lo que el conocimiento preciso de cada ξ_i no es relevante en aplicaciones de tiempo real.

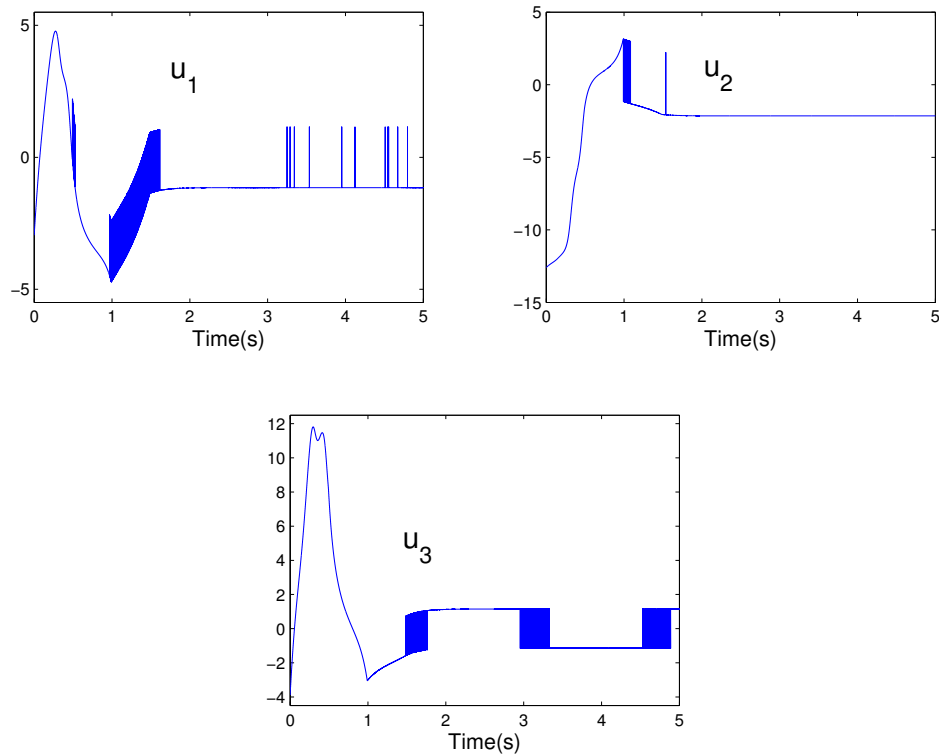


Figura 2.5.9: Controladores u_1 , u_2 , u_3

En la figura (2.5.9) se muestran los controladores u_1 , u_2 y u_3 encargados de compensar las perturbaciones ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 respectivamente.

2.6. REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO

En esta sección trataremos el control óptimo de sistemas lineales tanto invariantes como variantes en tiempo y sujetos a un funcional de costo cuadrático. Donde para ambos sistemas se considerarán funcionales con horizonte de tiempo finito e infinito respectivamente.

Enunciado del problema

Consideremos el sistema lineal invariante en tiempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.6.1)$$

donde, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de variables de estado del sistema, $x(t_0)$ el estado inicial del sistema, y $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ es el vector de variables que pueden ser usadas para controlar el sistema. Un objetivo podría ser encontrar una función de control $u(t)$ definida en $[t_0, T]$ la cual lleve el estado a cero en un tiempo T . Este es el tan mencionado **Problema de Regulación**.

Control Óptimo con Horizonte de Tiempo Finito

consideremos la minimización del funcional de costo

$$J = \int_0^T \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt + x^T(T)Q_Tx(T), \quad (2.6.2)$$

que está sujeta a

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.6.3)$$

R es una matriz simétrica definida positiva y Q Y Q_T son matrices simétricas.

Este problema es conocido en la literatura como el **problema de control lineal cuadrático**, donde la solución de este problema está relacionada a la existencia de una matriz simétrica que es solución de la **Ecuación Diferencial de Riccati (EDR)**

$$\dot{P}(t) = -A^T P(t) - P(t)A + P(t)SP(t) - Q, \quad P(T) = Q_T, \quad (2.6.4)$$

donde $S := BR^{-1}B^T$. el hecho de que se busque una solución simétrica para $P(t)$ es porque Q_T es simétrica. Pero esto implica que si $P(\cdot)$ es una solución de la (EDR) entonces, al tomar la transpuesta de ambos lados de la ecuación, obviamente $P^T(\cdot)$ satisface la (EDR) con la misma condición de frontera.

Teorema 3. (PROBLEMA DE CONTROL LINEAL CUADRÁTICO)

El problema de control lineal cuadrático (2.6.2) y (2.6.3) tiene, para cada estado inicial x_0 , una solución si y sólo si la ecuación diferencial de Riccati (2.6.4) tiene una solución simétrica $P(\cdot)$ sobre $[0, T]$.

Si el problema de control lineal cuadrático tiene una solución, entonces esta es única y el control óptimo en forma retroalimentada (o lazo cerrado) es

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t), \quad (2.6.5)$$

y además, $J(u^*) = x_0^T P(0) x_0$.

Horizonte de Tiempo Infinito

En esta sub-sección no se tomará en cuenta la restricción impuesta para el tiempo final T que debe ser finito. Ahora consideramos encontrar el problema de encontrar una función de control $u(.) = Fx(.)$ (donde F es una matriz invariante en tiempo) para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que minimice el funcional de costo

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt, \quad (2.6.6)$$

bajo la condición inicial de que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Aquí $Q = Q^T, R > 0$, y la variable de estado x es la solución de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.6.7)$$

en esta sub-sección se asume que el par (A, B) es estabilizable. Por otra parte, se introduce el conjunto de matrices retroalimentadas invariantes en tiempo, estables y lineales esto es

$$\mathcal{F} := \{F \mid A + BF \text{ es estable}\}.$$

Por conveniencia notacional $S := BR^{-1}B^T$ es usado.

Teorema 4. (PROBLEMA DE CONTROL LINEAL CUADRÁTICO HORIZONTE DE TIEMPO INFINITO)

Asumiendo que el par (A, B) es estabilizable y $u = Fx$, con $F \in \mathcal{F}$. El problema de control lineal cuadrático (2.6.6) y (2.6.7) tiene un mínimo $\hat{F} \in \mathcal{F}$ para $J(F)$ para cada x_0 si y sólo si la ecuación algebraica de Riccati

$$Q + A^T X + XA - XSX = 0. \quad (2.6.8)$$

tiene una solución simétrica estable P . Si el problema de control lineal cuadrático tiene una solución, entonces la solución es única y dada por $\hat{F} = -R^{-1}B^T P$ y el control óptimo en forma retroalimentada es

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t). \quad (2.6.9)$$

Además, $J(u^) = x_0^T P x_0$.*

Capítulo 3

ESTABILIZACIÓN SINGULAR ÓPTIMA POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS INVARIANTES EN EL TIEMPO.

En este capítulo se explora la posibilidad de utilizar el tan llamado **Control por Modo Deslizante Integral de Alto Orden** para resolver **problemas de estabilización singular óptima** (ESO) de orden arbitrario para sistemas inciertos. Conectamos el orden de singularidad de (ESO) con la co-dimensión del conjunto de variedad singular óptima. La SDIAO es diseñada para permitir que los **modos deslizantes** alcancen la **superficie deslizante óptima** (SDO) en un momento de tiempo prescrito y así asegurar la (ESO). Además, este controlador provee de robustez al sistema lineal ante incertidumbres y perturbaciones acotadas.

3.1. INTRODUCCIÓN

Control singular Lineal cuadrático es uno de los campos clásicos del control óptimo, el cual es utilizado en aplicaciones tales como en aeronáutica [20], [64], economía [9], el problema servo [33], etc.

los resultados principales de control singular cuadrático fueron recibidos en los años 60 y 70 y podría ser resumido como sigue:

- El problema de control singular óptimo de alto orden nos permite la reducción de la dimensión de la variedad singular óptima (VSO) (ver [31], [9]);
- para alcanzar la superficie singular óptima los controladores impulsivos son propuestos (ver, por ejemplo [31], [51]);
- en el artículo [51], la combinación de impulsos y controles por modos deslizantes de primer orden son usados para alcanzar la superficie singular óptima de alto orden;
- es sugerido el concepto de control de bajo costo (“cheap control”) , para convertir el problema de estabilización singular óptima en un problema Lineal Cuadrático singular perturbado para asegurar la rápida convergencia de las soluciones en la Variedad Singular Óptima, convirtiendolo en un problema de estabilización singular óptima (PESO) (ver por ejemplo [17], [43], [65]).

La principal desventaja de las soluciones del problema Lineal Cuadrático óptimo es que no son robustas con respecto a perturbaciones y variación de parámetros (ver por ejemplo [36], [11],[62]).

Por otra parte control singular cuadrático es usado para el convencional diseño de la superficie deslizante de primer orden (ver por ejemplo [73] capítulo 9, [18] capítulo 4).

El trabajo que está descrito en el libro de *Sliding Modes in Control and Optimization*. de [73] referente a la parte de control singular cuadrático puede resumirse como:

- el diseño de la superficie deslizante basada en la Variedad Deslizante Óptima;
 - el controlador convencional por modos deslizantes es diseñado para mantener las soluciones en la VSO diseñada. sin embargo, algunas consideraciones no fueron cubiertas por el convencional modo deslizante de primer orden en [73]:
1. el caso de los problemas de control singular óptimo de alto orden [31];
 2. el tiempo de inicio de la VSO no está especificado;
 3. la robustez de la solución propuesta con respecto a perturbaciones.

Contribuciones

En este capítulo se propone usar el enfoque de **Modos Deslizantes Integrales de Alto Orden** (MDIAO) descrito en [49] para resolver problemas de estabilización “Regulador Lineal Cuadrático Singular” de orden arbitrario para sistemas inciertos.

Las principales contribuciones que se presentaran en este capítulo son:

- una noción de orden de singularidad en problemas Lineales Cuadráticos es introducida;
 - basandose en el orden de singularidad se diseñará la superficie deslizante de alto orden (SDAO) donde su diseño está formado a partir de la superficie deslizante óptima de alto orden
 - posteriormente se introduce una nueva variable deslizante auxiliar, llamada superficie deslizante integral de alto orden (SDIAO) y en conjunción con la implementación de los controladores quasi-continuos de alto orden descritos en [48], nos permitirá obtener los siguientes resultados:
- la (SDAO) convergerá a la superficie deslizante óptima de alto orden en un tiempo finito t_1 deseado
 - y para todo $t \geq t_1$ las soluciones serán mantenidas en la superficie deslizante óptima de alto orden
 - asegurara la insensibilidad de las trayectorias del sistema con respecto a las incertidumbres acopladas y acotadas.

Ejemplo 13. A continuación presentaremos ejemplos ilustrativos de la conexión natural del orden de singularidad de un problema de control lineal cuadrático y el orden del controlador por modos deslizantes.

Considere el siguiente sistema nominal

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3.1.1)$$

la condición inicial $z(t_0) = z_0$ y el funcional de costo libre de control

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} [z_1^2(t) + z_2^2(t) + z_3^2(t)] dt \quad (3.1.2)$$

El instante de tiempo t_1 será especificado posteriormente. El diseño del control por modo deslizante convencional considera la última variable del índice de desempeño (3.1.2) como una variable de control virtual, por lo tanto la minimización del problema está sujeta al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales reducido

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_1} z_3 \quad (3.1.3)$$

con índice de desempeño

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} \left[[z_1(t), z_2(t)] Q_1 [z_1(t), z_2(t)]^T + z_3(t) R_1 z_3(t) \right] dt \quad (3.1.4)$$

donde $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $R_1 = 1$. La solución a este problema es encontrada por aplicación directa del Regulador Lineal Cuadrático (LQR). El control virtual óptimo está dado como $z_3 = -(R_1)^{-1} B_1^T P_1 [z_1, z_2]^T$, donde P_1 es la solución definida positiva de la siguiente ecuación matricial de Riccati (ver [60]): $P_1 A_1 + A_1^T P_1 + Q_1 - P_1 B_1 (R_1)^{-1} B_1^T P_1 = 0$.

Sea la siguiente superficie deslizante como la VSO de la forma siguiente:

$$S_1(z) = z_3 + (R_1)^{-1} B_1^T P_1 [z_1, z_2]^T. \quad (3.1.5)$$

Nota que si $S_1(z) = 0$ es alcanzado en algún tiempo t_1 y mantenida en cero para $t \geq t_1$ tendremos que las variables de estado pertenecientes a (3.1.5), tomarán soluciones estables que lograrán que el índice (3.1.2) alcance su valor mínimo para todo $t \in [t_1, \infty)$ (ver [9]). La derivada de $S_1(z)$ tiene la forma $\dot{S}_1(t) = u - \alpha_0 z_1 - \alpha_1 z_2 - \alpha_2 z_3 + (R_1)^{-1} B_1^T P_1 [z_2, z_3]^T$, es decir. el grado relativo de S_1 es 1. Lo que implica que un control por modos deslizantes convencional, de primer orden puede mantener las variables del sistema en la VSO $S_1 = 0$ [74], [48].

Considera ahora el problema de estabilización singular óptima (PESO) con el funcional de costo:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} [z_1^2(t) + z_2^2(t)] dt \quad (3.1.6)$$

sujeta a las dinámicas lineales (3.1.1). La variable z_2 es tomada como la nueva variable de control virtual para z_1 en (3.1.6), así como z_3 fue la variable de control virtual para las variables z_1 y z_2 . Por lo tanto, el problema de minimización para z_2 como la variable de control es para minimizar (3.1.6) sujeta a la dinámica $\dot{z}_1 = A_2 z_1 + B_2 z_2$; $A_2 = 0$, $B_2 = 1$.

Nuevamente este problema puede ser formulado como un problema de regulación lineal cuadrático con las correspondientes matrices A_2 , B_2 , $Q_2 = 1$ y $R_2 = 1$. El control virtual óptimo es obtenido como $z_2 = -R_2^{-1} B_2^T P_2 z_1$, donde P_2 es la solución definida positiva de la siguiente ecuación algebraica escalar de Riccati $P_2 A_2 + A_2^T P_2 + Q_2 - P_2 B_2 (R_2)^{-1} B_2^T P_2 = 0$. Permitamos definir la superficie deslizante como $S_2(z) = z_2 + R_2^{-1} B_2^T P_2 z_1$, y sus derivadas $\dot{S}_2(z) = z_3 + R_2^{-1} B_2^T P_2 z_2$ y $\ddot{S}_2(z) = u - \alpha_0 z_1 - \alpha_1 z_2 - \alpha_2 z_3 + R_2^{-1} B_2^T P_2 z_3$. Esto significa que S_2 tiene grado relativo 2, por lo que tenemos que S_2 es una superficie deslizante de segundo orden. Y para mantener la solución de (3.1.1) en la VSO $S_2 = \dot{S}_2 = 0$ se necesitará un control por modos deslizantes de segundo orden [48].

Considere el último problema de optimización $J_3 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} z_1^2(t) dt$. La variedad singular óptima para este problema, es solo el origen, y esta es requerida para mantener las trayectorias del sistema en el origen. En este caso el grado relativo es tres y se necesita un modo deslizante de tercer orden ([48]) para mantener el sistema en el origen. es claro que el orden del modo deslizante está relacionado con las propiedades del funcional de costo.

Generalmente, las condiciones iniciales no pertenecen a la VSO. Entonces, es necesario el diseño de controladores que lleven las trayectorias del sistema a la VSO. algunos enfoques para alcanzar la VSO son:

- Control impulsivo es usado para asegurar que las trayectorias salten a la VSO en el tiempo inicial t_0 (ver, por ejemplo, [31], [9]).
- Combinación de control impulsivo y un controlador convencional por modos deslizantes ([51]).
- El concepto de control de bajo costo, es usado para asegurar la rápida convergencia asintótica de las soluciones a la VSO el cual en este caso es una variedad de dinámicas lentas ([17], [43], [65]).

La realización de controles sin penalización requieren de energía infinita , así está depende de las limitaciones del actuador.

La meta de este capítulo es diseñar una trayectoria que se denominará la trayectoria transitoria para lograr que el modo deslizante previamente diseñado logre alcanzar la VSO en un tiempo prescrito, y asegurar que la soluciones del sistema lineal comiencen a tomar soluciones asintóticamente estables una vez que la VSO ha sido alcanzada.

3.2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Considera el Sistema Lineal Invariante en el Tiempo perturbado de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + f(t, x)); \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.2.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la *matriz del sistema*, $B \in \mathbb{R}^n$ es la *matriz del control*, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el *vector de estados*, $u(t) \in \mathbb{R}$ es un control escalar de entrada, $|f(t, x)| \leq F \in \mathbb{R}^+$ es una perturbación de entrada Lebesgue - medible acoplada con cota conocida que puede representar disturbios externos desconocidos y dinámicas acotadas desconocidas del sistema. Suponga que el par (A, B) es *controlable*, $\text{rank}(B) = 1$. Aquí y siempre las soluciones de (3.2.1) son unicas en el sentido de Filippov ([21]).

El problema de estabilización singular óptima para las dinámicas (3.2.1) podría estar mal planteado porque el sistema (3.2.1) es incierto. Entonces, junto con el sistema (3.2.1), considera el problema Lineal Cuadrático singular nominal con dinámicas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.2.2)$$

$$J(x(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} [x(t)^T Q x(t)] dt, \quad (3.2.3)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *simétrica y semi-definida positiva*, $t_1 > t_0$, con t_0 tiempo inicial. El criterio (3.2.3) es singular con respecto a la entrada de control escalar $u(t)$ y éste es un costo *libre de control*. La solución del (PESO) nominal (3.2.2), (3.2.3) se encuentra en la VSO.

Es claro que la condición inicial mostrada en (3.2.1) no puede pertenecer a la VSO para el PESO (3.2.2), (3.2.3). Eso es porque diseñaremos una trayectoria o superficie de deslizamiento para (3.2.2) que comience en las condiciones iniciales dadas en (3.2.1) y que llegue a la VSO en un momento de tiempo prescrito t_1 .

Los objetivos de este capítulo son (a) diseñar la superficie del (MDAO) basado en la VSO, (b) diseño de la trayectoria para la fase de alcance y (c) asegurar la insensibilidad de la solución propuesta para el PESO nominal (3.2.2), (3.2.3) con respecto a incertidumbres en las dinámicas (3.2.1). Con está ayuda, una conexión entre el orden de singularidad del PESO y el orden del modo deslizante es establecido y el MDIAO es diseñado para asegurar la insensibilidad ante las incertidubres.

Entonces, para poder resolver este PESO, una transformación de (3.2.2) a la *Forma Canónica Controlable* (sección 3.3) es necesaria para tener un nuevo sistema en variables de z que debido a su forma será de utilidad para resolver este tipo de problemas. Después de esto, el criterio (3.2.3) necesita ser transformado para poder mantener los pesos originales de los estados. Posteriormente, en sección 3.4 describimos la conexión entre el *Orden de Singularidad* del Índice de Desempeño del PESO y el orden del modo deslizante el cual debiera ser diseñado. Entonces, en sección V diseñamos la superficie deslizante del orden correspondiente como una solución del PESO y el diseño de la trayectoria transitoria para alcanzar la VSO. En sección VI, diseñamos un CMDIAO para garantizar que en un tiempo prescrito la superficie deslizante propuesta converja a cero. En sección VII, un ejemplo numérico es presentado para ilustrar los resultados obtenidos.

3.3. TRANSFORMACIÓN DEL SISTEMA E ÍNDICE DE SINGULARIDAD

Transformación a la Forma Canónica Controlable. Si el par (A, B) es controlable entonces existe una transformación no-singular T , tal que el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales en variables de z está dado por

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u; \quad z(t_0) = z_0, \quad (3.3.1)$$

está en la *Forma Canónica Controlable*. Aquí, $z = Tx$, $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$, y $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. La matriz \bar{A} tiene la *Forma de Brunovsky*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ son los coeficientes del polinomio característico.

Transformación del Índice de Desempeño. El peso de la matriz Q necesita ser transformado a fin de mantener su significado original para el sistema transformado (3.3.1)

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \quad \bar{Q}_{22} \in \mathbb{R} \quad (3.3.2)$$

En el diseño del modo deslizante convencional, el sistema (3.3.1) es particionado con las mismas dimensiones como \bar{Q} en (3.3.2), el vector de estado es también dividido en dos conjuntos $z = [\bar{z}_1, \bar{z}_2]^T$, la variable \bar{z}_2 es tomada como un control virtual para estabilizar el subsistema \bar{z}_1 . El bloque de matrices $\bar{Q}_{11} \geq 0$ and $\bar{Q}_{22} > 0$ son usadas para asignar los pesos a \bar{z}_1 y al control virtual \bar{z}_2 , respectivamente, la cual nos permite una solución regular para una Ecuación Algebraica de Riccati. Entonces un control virtual estabilizante $\bar{z}_2 = -K\bar{z}_1$ es diseñado, y el modo deslizante es seleccionado como $\sigma = \bar{z}_2 + K\bar{z}_1$ con el *grado relativo* $r = 1$.

El Modo Deslizante Convencional no considera el caso cuando $\bar{Q}_{22} = 0$ y surge una nueva situación porque la solución del PESO no tendrá grado relativo 1.

3.4. ORDEN DE SINGULARIDAD DEL PESO

Proposición 1. Si $\bar{Q}_{22} = 0$ en (3.3.2), debido a la simetría y semi-positividad de \bar{Q} , todos los elementos de \bar{Q}_{12} y \bar{Q}_{21} son cero.

Esto significa que en general \bar{Q} puede solo tener la forma

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-k \text{ columnas}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{k \text{ columnas cero}}$

con $\bar{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-k-1) \times (n-k-1)}$ una matriz semi-definida positiva simétrica, $\bar{Q}_{22} > 0$, $\bar{Q}_{22} \in \mathbb{R}$, y consecuentemente el índice de ejecución tiene la forma

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} (\bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{11} \bar{z}_1(t) + 2\bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{12} \bar{z}_2 + \bar{z}_2^T(t) \bar{Q}_{22} \bar{z}_2(t)) dt \quad (3.4.2)$$

Definición 6. El **Orden de Singularidad** es el número $i = k + 1$, donde k es el número de columnas-cero sobre la matriz de pesos \bar{Q} tal que $\bar{Q}_{22} > 0$.

Observación 5. El orden de singularidad puede tomar cualquier valor desde 1 a n . Éste corresponde a todos los posibles problemas de control singular de alto orden para el índice (3.3.2), hasta el punto de reducir un funcional dependiendo solamente de la primer coordenada. Para eliminar los términos cruzados en (3.4.2) un cambio de variables es introducido $v_i = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1$.

Finalmente el Índice de Ejecución llega a ser

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} (\bar{z}_1^T(t) \underbrace{(\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T)}_{:=\hat{Q}} \bar{z}_1(t) + v_i^T(t) \underbrace{\bar{Q}_{22}}_{:=\hat{R}} v_i(t)) dt \quad (3.4.3)$$

Nota que después de la transformación T y el cambio de variable v_i , el índice de ejecución (3.2.3) el cual fue singular con respecto a u , se ha convertido en no singular, ahora con v_i como *control virtual* y con matrices de peso $\hat{Q} := \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T$ y $\hat{R} := \bar{Q}_{22}$.

3.5. MDAO DISEÑO DE LA SUPERFICIE

Partición del Sistema. después de la transformación del índice, es necesario ejecutar la misma partición al sistema (3.3.1). El vector de estado es particionado en tres subconjuntos como $z = [\bar{z}_1^T \bar{z}_2^T \bar{z}_3^T]^T$ donde \bar{z}_1 es la dinámica del modo deslizante reducido, \bar{z}_2 un *control virtual* y \bar{z}_3 el resto de las variables de estado.

$$\bar{z}_1 = [z_1 \cdots z_{n-i}]^T; \bar{z}_2 = z_{n-i+1}; \bar{z}_3 = [z_{n-i+2} \cdots z_n]^T \quad (3.5.1)$$

Con las particiones, el siguiente subsistema es obtenido

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\bar{z}_2; \bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}; \bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-i)} \quad (3.5.2)$$

Nota que \bar{Q}_{11} tiene la misma dimensión como $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$

Debido a la Forma de Brunovsky de \bar{A} , las particiones \bar{A}_{11} y \bar{A}_{12} tienen la forma *Canónica Controlable*

$$\bar{A}_{11} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n-i \text{ columnas}}; \bar{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad n-i \text{ elementos}$$

Finalmente, después del cambio de variable $v_i = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T\bar{z}_1$; el sub-sistema (3.5.2) se convierte en

$$\dot{\bar{z}}_1 = \underbrace{(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T)}_{\hat{A}} \bar{z}_1 + \underbrace{\bar{A}_{12}}_{\hat{B}} v_i \quad (3.5.3)$$

$$\hat{A} = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T; \hat{B} = \bar{A}_{12} \quad (3.5.4)$$

Solución Regular de la Ecuación Algebraica de Riccati. Los Sistemas (3.2.2) y el Índice de Desempeño (3.2.3) han sido transformados de un Problema de Control Óptimo Singular a un sub-sistema (3.5.3), optimizado con respecto a un criterio no-singular (3.4.3), el cual es usualmente resuelto por la *Ecuación Algebraica de Riccati* (EAR)

$$P\hat{A} + \hat{A}^T P + \hat{Q} - P \underbrace{\hat{B}}_{\bar{A}_{12}} (\underbrace{\hat{R}}_{\bar{Q}_{22}})^{-1} \hat{B}^T P = 0 \quad (3.5.5)$$

y donde P es la única solución definida positiva de la ecuación matricial de Riccati si el par (\hat{A}, \bar{D}) es observable con \bar{D} como cualquier matriz de tal manera que $\bar{D}^T \bar{D} = \hat{Q}$ [2].

Diseño del Control Virtual y la Superficie. Podemos construir un control virtual óptimo estabilizante (bajo la controlabilidad de (A, B) y condiciones de observabilidad (\hat{A}, \bar{D}) [60]) con la matriz P , la solución de EAR, y un cambio de variable v_i ,

$$\bar{z}_2 = -K\bar{z}_1 = -(\hat{R})^{-1}(\hat{B}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1 = -(\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1. \quad (3.5.6)$$

Esto produce estabilidad de lazo cerrado al sub-sistema (3.5.3). Entonces, la Superficie de Modos Deslizantes de grado relativo $r > 1$ es

$$\sigma_i = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T) \bar{z}_1 \quad (3.5.7)$$

Puede ser visto que el **Orden de Singularidad i** del Índice de Ejecución es igual al grado relativo de la superficie por modos deslizantes diseñada

Lema 1. : si $\bar{Q}_{22} > 0$, con un Orden de Singularidad i , el par (A, B) es controlable, y el par (\hat{A}, \bar{D}) es observable, donde $\bar{D}^T \bar{D} = \hat{Q}$, entonces el vector óptimo que actúa como control virtual minimizante en (3.5.2) es (3.5.6), donde P , es la única solución definida positiva de la Ecuación matricial de Riccati (3.5.5).

Observación 6. Observabilidad del par (A, D) (con $D^T D = Q$) no garantiza observabilidad de particiones (\hat{A}, \bar{D}) , donde $\bar{D}^T \bar{D} = \hat{Q}$.

puede mostrarse facilmente por este contra ejemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} x; \quad Q = D^T D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.8)$$

El par (A, D) es observable, es decir. $\text{rank}(\mathbb{O}) = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_3^2 + \gamma_2 \end{bmatrix} = 3$. El par de Particiones $A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $Q_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ son claramente no observables. Entonces, la condición de observabilidad del lema (1) es hecha a través de particiones.

Diseño de la trayectoria Transitoria para alcanzar la VSO.

En general, la solución de (3.2.2) no comienza en la VSO y, por lo tanto, la especificación del punto de inicio de la VSO es requerido.

Suponga que, con condiciones iniciales (3.3.1), al menos para algún $0 \leq j \leq i-1$, $\sigma_i^{(j)}(z_0) \neq 0$. Entonces queremos que las trayectorias del sistema alcancen el i -ésimo orden del modo deslizante $\sigma_i(z(t_1)) = \dot{\sigma}_i(z(t_1)) = \dots = \sigma_i^{(i-1)}(z(t_1)) = 0$ en el tiempo de alcance t_1 .

Definiendo la trayectoria transitoria $\mu_i(t)$ para la solución del sistema (3.2.2) durante el intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$ como una función polinomial

$$\mu_i(t) = (t - t_1)^i \left(c_0 + c_1(t - t_0) + \dots + c_{i-1}(t - t_0)^{i-1} \right) \quad (3.5.9)$$

satisfaciendo las condiciones iniciales

$$\mu_i(t_0) = \sigma_i(z_0), \dot{\mu}_i(t_0) = \dot{\sigma}_i(z_0), \dots, \mu_i^{(i-1)}(t_0) = \sigma_i^{(i-1)}(z_0). \quad (3.5.10)$$

En el tiempo de llegada t_1 sobre la VSO, la trayectoria transitoria cumple que $\mu_i(t_1) = \dot{\mu}_i(t_1) = \dots = \mu_i^{(i-1)}(t_1) = 0$ y $\forall t > t_1$. Los parámetros c_i podrían ser únicamente definidos de (3.5.10).

Definiendo la función $t_1 - t_0$ como una función definida positiva de las condiciones iniciales como

$$t_1 - t_0 = T_i \left(\sigma_i(z_0), \dot{\sigma}_i(z_0), \dots, \sigma_i^{(i-1)}(z_0) \right) \quad (3.5.11)$$

Para cualquier $\lambda, p > 0$ la función T_i podría ser únicamente definida como [49]

$$T_i = \lambda \left(|\sigma_i(z_0)|^{p/i} + |\dot{\sigma}_i(z_0)|^{p/(i-1)} + \dots + \left| \sigma_i^{(i-1)}(z_0) \right|^p \right)^{1/p}. \quad (3.5.12)$$

La función $\mu_i(t)$ es únicamente determinada por (3.5.9), (3.5.10) y (3.5.11).

3.6. DISEÑO DEL CONTROL

El control Nominal Equivalente. La expresión de la i -ésima derivada de σ_i puede ser generalmente escrita como $\sigma_i^{(i)} = \underbrace{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_n z_n}_{-u_{eqn}} + u$, y entonces

$$u_{eqn} = -[\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_n z_n]. \quad (3.6.1)$$

Aplicando la ley de control $u = u_{eqn} + v_i$, y la expresión del sistema (3.3.1) en unas nuevas variables de estado $\begin{bmatrix} \bar{z}_1^T, \sigma_i, \dot{\sigma}_i, \ddot{\sigma}_i, \dots, \sigma_i^{(i-1)} \end{bmatrix}^T$,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}K)\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\sigma_i; & K &= (\bar{Q}_{22})^{-1} [\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T] \\ \sigma_i^{(i)} &= v_i + \bar{f}; & |\bar{f}(t, \bar{z}_1, \sigma_i)| &\leq \bar{F}. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

El control por Modos Deslizantes es diseñado para restringir las trayectorias del sistema a la variedad (3.5.7), donde las dinámicas son descritas por el orden reducido del modelo

$$\dot{\bar{z}}_1 = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \underbrace{(\bar{Q}_{22})^{-1} [\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T]}_K) \bar{z}_1.$$

Diseño del Modo Deslizante Integral de Alto Orden (MDIAO)

Ahora de [49] podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 5. *El controlador*

$$\begin{aligned} v_i &= \Phi_i \Psi_{i-1,i}(\Sigma_i, \dot{\Sigma}_i, \dots, \Sigma_i^{(i-1)}), \\ \varphi_{0,i} &= \Sigma_i; \quad N_{0,i} = |\Sigma_i|; \quad \Psi_{0,i} = \varphi_{0,i}/N_{0,i} = \text{sign} \Sigma_i; \quad \varphi_{l,i} = \Sigma_i^{(l)} + \beta_i N_{l-1,i}^{(i-l)/(i-l+1)} \Psi_{l-1,i} \\ N_{l,i} &= \left| \Sigma_i^{(l)} \right| + \beta_i N_{l-1,i}^{(i-l)/(i-l+1)}; \quad \Psi_{l-1,i} = \varphi_{l,i}/N_{l,i}, \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

$$\Sigma_i(t, z) = \begin{cases} \sigma_i(z) - \mu_i(t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\ \sigma_i(z), & t \geq t_1 \end{cases} \quad (3.6.4)$$

para $\Phi_i \geq |\bar{f}| + |\mu_i^{(i)}|$ establece la convergencia del modo deslizante de orden i y la de sus derivadas a cero, esto es $\sigma_i(z(t)) = \dot{\sigma}_i(z(t)) = \dots = \sigma_i^{(i-1)}(z(t)) = 0$ para $t \geq t_1$. Tenemos que la igualdad $\sigma_i(z(t)) = \mu_i(t)$, es satisfecha en t_0 y si además deseamos especificar el tiempo t_1 en el que $\sigma_i(z(t))$ converge a cero es necesario que la igualdad $\sigma_i(z(t)) = \mu_i(t)$, sea mantenida durante $t_r \leq t \leq t_1$. con $t_r > t_0$, donde t_r es el tiempo de convergencia en el que Σ_i se hace cero.

El control quasi-continuo de alto orden ([48], [49]) para $i = 1, 2, 3$ toma la forma:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\Phi_1 \text{Sign} \Sigma_1, \\ v_2 &= -\Phi_2 \left(\dot{\Sigma}_2 + |\Sigma_2|^{1/2} \text{Sign} \Sigma_2 \right) / \left(\left| \dot{\Sigma}_2 \right| + |\Sigma_2|^{1/2} \right), \\ v_3 &= -\Phi_3 \frac{\left[\ddot{\Sigma}_3 + 2 \left(\left| \dot{\Sigma}_3 \right| + |\Sigma_3|^{2/3} \right)^{-1/2} \left(\dot{\Sigma}_3 + |\Sigma_3|^{2/3} \text{Sign} \Sigma_3 \right) \right]}{\left[\left| \ddot{\Sigma}_3 \right| + 2 \left(\left| \dot{\Sigma}_3 \right| + |\Sigma_3|^{2/3} \right)^{1/2} \right]}. \end{aligned}$$

Para ajustar los parámetros de los controladores seguimos [49]. La i -ésima derivada de $\Sigma_i(t, z)$ con respecto al tiempo toma la forma $\Sigma_i^{(i)}(t, z) = \sigma_i^{(i)}(t) - \mu_i^{(i)}(t) = v_i + \bar{f} - \mu_i^{(i)}(t)$, así, para alcanzar $\Sigma_i(t, z) = 0$, la ganancia del CMDIAO v_i debe satisfacer $\Phi_i \geq |\bar{f}| + |\mu_i^{(i)}(t)|$. Esto significa que la capacidad del actuador debiera ser más que las perturbaciones más el modulo de la i -ésima derivada con respecto del tiempo del polinomio.

Observación 7. : Notemos que la superficie auxiliar (3.6.4) es propuesta para acelerar la convergencia a cero de la superficie deslizando σ_i mediante un seguimiento a una trayectoria μ_i que está compuesta por dos tramos. El primer tramo es continua para $t_0 \leq t \leq t_1$ y el segundo tramo es cero para $t \geq t_1$

Observación 8. : También notemos que solo podemos concluir que σ_i colapsa a la superficie deslizando óptima $\sigma_i = 0$ en el mismo tiempo que lo hace μ_i , si y sólo si el controlador quasicontinuo de alto orden v_i logra hacer que $\Sigma_i(t, z)$ converja a cero antes que μ_i se colapse a cero para $t \geq t_1$, por lo que ganancias Φ_i elevadas lograrán este propósito, pero en consecuencia esto producirá un incremento del chattering.

Descripción del algoritmo

PASO 1: La transformación del sistema (3.2.1) a la forma canónica controlable (3.3.1).

PASO 2: Transformación del funcional (3.2.3) a la forma (3.4.3).

PASO 3: Diseñar la superficie σ_i resolviendo la correspondiente ecuación matricial de Riccati (3.5.5).

PASO 4: Calcular el control equivalente nominal (3.6.1) para compensar la parte conocida del sistema .

PASO 5: Diseñar el polinomio (3.5.9) correspondiente a la fase de alcance.

PASO 6: Diseñar el correspondiente control quasi-continuo integral por modos deslizantes de alto orden (3.6.3).

Ejemplo 14. Considera el sistema perturbado (3.2.1) y la función de costo asociada (3.2.3), con matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 7 & 2 \\ -8 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^5$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.0108 & -0.0009 & -0.0041 & -0.0040 & -0.0043 \\ -0.0009 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0004 \\ -0.0041 & 0.0004 & 0.0016 & 0.0015 & 0.0017 \\ -0.0040 & 0.0003 & 0.0015 & 0.0015 & 0.0016 \\ -0.0043 & 0.0004 & 0.0017 & 0.0016 & 0.0017 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = [3 \quad -3 \quad 4 \quad -4 \quad 1]^T$$

$$f = 2 \cos(2t) + \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 1.5, |f| \leq 4.5, \text{ y } Q = Q^T \geq 0.$$

PASO 1: La transformación del sistema. La matriz T que transforma el sistema a la forma canónica controlable (3.3.1) es

$$T = \begin{pmatrix} -0.0034 & 0.0004 & 0.0006 & 0.0020 & 0.0012 \\ -0.0063 & 0.0022 & 0.0049 & -0.0009 & 0.0033 \\ -0.0460 & 0.0062 & 0.0204 & 0.0140 & 0.0190 \\ -0.1807 & 0.0407 & 0.1221 & 0.0586 & 0.0931 \\ -1.0052 & 0.2213 & 0.5942 & 0.5991 & 0.6690 \end{pmatrix} \quad (3.6.5)$$

En las nuevas coordenadas el sistema toma la forma (3.3.1) con

$$\bar{A} = T A T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 597 & -36 & -286 & 26 & 11 \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = T B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PASO 2: Transformación del funcional. Aplicando la relación (3.3.2) y de acuerdo a (3.4.1)

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & -5 & 10 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{0 & 0}_{k=2} \end{pmatrix} \quad (3.6.6)$$

tenemos $k = 2$ vectores columna cero en (3.6.6), por lo que el orden de singularidad está dado por $i = k + 1 = 3$. Donde obtenemos las siguientes sub-matrices:

$$\bar{Q}_{11} = \begin{pmatrix} 26 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}; \quad \bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21}^T = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{Q}_{22} = 4$$

$$\hat{Q} = \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

el índice de ejecución en las nuevas variables es:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1=2.2075}^{\infty} \left(\bar{z}_1^T(t) \hat{Q} \bar{z}_1(t) + v_3^T \bar{Q}_{22} v_3 \right) dt \quad (3.6.7)$$

PASO 3: Diseño de σ_3 . Resolviendo la correspondiente ecuación de Riccati (3.5.5), $P = \begin{pmatrix} 16.8447 & 0.1980 \\ 0.1980 & 6.6459 \end{pmatrix}$ y $K = (\bar{Q}_{22})^{-1} [\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T] = [2.5495 \quad 1.1615]$. La Superficie Deslizante es dada por:

$$\sigma_3 = z_3 + 2.5495z_1 + 1.1615z_2$$

donde las condiciones iniciales transformadas $z_0 = T x_0 = [-0.0134 \quad 0.0012 \quad -0.1120 \quad -0.3171 \quad -3.0303]^T$. Con $\sigma_3(0) = -0.1449$, $\dot{\sigma}_3(0) = -0.4442$ y $\ddot{\sigma}_3(0) = -7.3583$.

PASO 4: Diseñar el control nominal equivalente

$$\dot{\sigma}_3 = z_4 + 2.5495z_2 + 1.1615z_3; \quad \ddot{\sigma}_3 = z_5 + 2.5495z_3 + 1.1615z_4$$

$$\ddot{\sigma}_3 = \underbrace{597z_1 - 36z_2 - 286z_3 + 28.5495z_4 + 12.1615z_5}_{-u_{eqn}} + u \quad (3.6.8)$$

así el control nominal equivalente es $u_{eqn} = -(597z_1 - 36z_2 - 286z_3 + 28.5495z_4 + 12.1615z_5)$, y finalmente tenemos que el sistema en las variables $(\bar{z}_1, \sigma_3, \dot{\sigma}_3, \ddot{\sigma}_3)$ toma la forma:

$$\dot{\bar{z}}_1 = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}K) \bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\sigma_3; \quad \ddot{\sigma}_3 = v_3 + \bar{f}(z, t)$$

PASO 5: Diseño de \sum_3 . Para diseñar la superficie deslizante auxiliar $\sum_3(t, z) = \sigma_3(z) - \mu_3(t)$, el polinomio $\mu_3(t)$ debe satisfacer

$$\mu_3(t_0) = \sigma_3(z_0), \dot{\mu}_3(t_0) = \dot{\sigma}_3(z_0), \ddot{\mu}_3(t_0) = \ddot{\sigma}_3(z_0), \mu_3 = 0 \quad \forall t \geq t_1, \quad (3.6.9)$$

Permitamonos tomar $t_0 = 0$ y $t_1 = 2.2075$ como en (3.6.7), y de la fórmula (3.5.12)

$$T_3 = \lambda \left(|\sigma_3(0)|^2 + |\dot{\sigma}_3(0)|^3 + \dots + |\ddot{\sigma}_3(0)|^6 \right)^{1/6}; \quad \lambda = 0.3$$

aplicando (3.5.11), obtenemos $t_1 = T_3$, el cual es el tiempo de alcance. El correspondiente polinomio tiene la forma:

$$\mu_3(t) = (t - T_3)^3 (c_0 + c_1 t + c_2 t^2) \quad (3.6.10)$$

Para encontrar las constantes c_0 , c_1 y c_2 aplicamos la condición (3.6.9). Primero para calcular c_0 , usamos $\mu_3(0) = \sigma_3(0)$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} (0 - T_3)^3 (c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2) &= \sigma_3(0) \\ \Rightarrow c_0 &= -\sigma_3(0)/T_3^3 \end{aligned}$$

para encontrar c_1 , la condición $\dot{\mu}_3(0) = \dot{\sigma}_3(0)$ debe mantenerse, entonces:

$$\begin{aligned} 3(0 - T_3)^2 (c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2) + (0 - T_3)^3 (c_1 + 2c_2(0)) &= \dot{\sigma}_3(0) \\ \Rightarrow c_1 &= (3T_3^2 c_0 - \dot{\sigma}_3(0)) / T_3^3. \end{aligned}$$

Finalmente para obtener c_2 , usamos $\ddot{\mu}_3(0) = \ddot{\sigma}_3(0)$. Ahora tenemos que:

$$\begin{aligned} 6(0 - T_3) (c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2) + 6(0 - T_3)^2 (c_1 + 2c_2(0)) + 2c_2(0 - T_3)^3 &= \ddot{\sigma}_3(0) \\ \Rightarrow c_2 &= (6T_3^2 c_1 - 6T_3 c_0 - \ddot{\sigma}_3(0)) / 2T_3^3. \end{aligned}$$

Por lo que las constantes resultantes están dadas por $c_0 = 0.0135$, $c_1 = 0.0596$, $c_2 = 0.4147$.

PASO 6: Diseño del CMDIAO. El controlador de tercer orden puede ser diseñado como

$$v_3 = -\Phi_3 \frac{\left[\ddot{\sum}_3 + 2 \left(\left| \dot{\sum}_3 \right| + \left| \sum_3 \right|^{2/3} \right)^{-1/2} \left(\dot{\sum}_3 + \left| \sum_3 \right|^{2/3} \mathbf{Sign}(\sum_3) \right) \right]}{\left[\left| \ddot{\sum}_3 \right| + 2 \left(\left| \dot{\sum}_3 \right| + \left| \sum_3 \right|^{2/3} \right)^{1/2} \right]} \quad (3.6.11)$$

Para calcular la ganancia Φ_3 , se considera $4.5 \geq \left| 2 \cos(2t) + \cos\left(\sum_{i=1}^5 x_i\right) + 1.5 \right|$ (ver [49]), y la tercer derivada con respecto al tiempo de $\sum_3(t, z)$ es $\sum_3^{(3)}(t, z) = v_3 + \bar{f} - \mu_3^{(3)}(t)$ donde $\left| \mu_3^{(3)} \right| \geq$

$\left| 6(c_0 + c_1 t + c_2 t^2) + 18(t - T_3)(c_1 + 2c_2 t) + 18c_2(t - T_3)^2 \right| = 38.8250$. Así la ganancia del CMDIAO (3.6.11) es $\Phi_3 = 45 \geq |\bar{f}| + |\mu_3^{(3)}| = 43.3250$. La superficie deslizante estará dada por $\sigma_3 = z_3 + 2.5495z_1 + 1.1615z_2$, también tenemos que $\sigma_3(0) = -0.1449$, $\dot{\sigma}_3(0) = -0.4442$, $\ddot{\sigma}_3(0) = -7.3583$. Las siguientes figuras representan los resultados de simulación para este algoritmo. Figura (1a) y (1b) muestran las trayectorias del sistema y el desarrollo de la superficie $\sigma_3(t)$ y el polinomio $\mu_3(t)$, respectivamente. En la última podemos ver como la superficie deslizante σ_3 se intersecta en cero con el polinomio μ_3 en el tiempo $t_1 = 2.2075$ que corresponde al tiempo de alcance de σ_3 hacia la sección polinomial que está comprendida de $[0, t_1]$ y donde $\sigma_3 = 0 \forall t > t_1$. En Figura (1c) se muestra la convergencia a cero de σ_3 , $\dot{\sigma}_3$ y $\ddot{\sigma}_3$ con respecto al tiempo, y en Figura (1d) la señal de control, la cual elimina la parte lineal y que trabaja en conjunción con el CMDIAO v_3 . En donde puede verse que, aunque Φ_3 está fija, el cambio en la amplitud de la señal del control (1d) es debida a los términos \sum_3 , $\dot{\sum}_3$ y $\ddot{\sum}_3$ en la expresión (3.6.11) que es la encargada de compensar la perturbación.

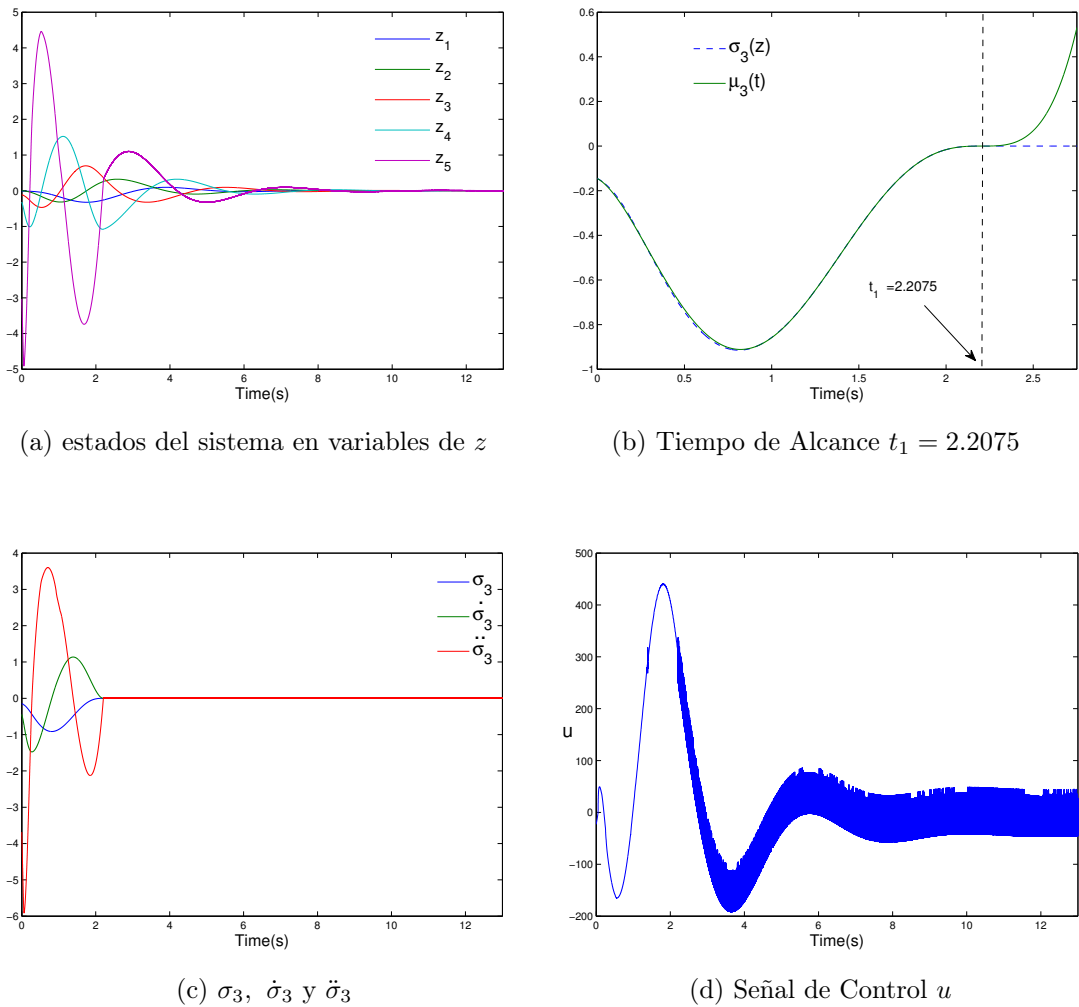


Figura 3.6.1: Ejemplo de Simulación

3.7. CONCLUSIÓN

Este capítulo muestra una conexión natural entre el orden de singularidad del problema de Regulador Lineal Cuadrático Singular y el orden de los modos deslizantes. La VSO es considerada como la variedad deslizante para el MDAO del orden correspondiente.

El control quasicontinuo de alto orden en conjunción con los modos deslizantes integrales de alto orden aseguran:

- que las trayectorias de las variables de estado lleguen a la VSO en un tiempo prescrito t_1 , asegurando tener soluciones asintóticamente estables a partir del tiempo t_1 en adelante.
- que las variables de estado permanescan en la VSO para todo tiempo $t \geq t_1$.
- la insensibilidad de las trayectorias del sistema con respecto a incertidumbres acopladas y acotadas.

Capítulo 4

OPTIMIZACIÓN SINGULAR POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS VARIANTES EN TIEMPO

4.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo consiste en aplicar el enfoque de optimización de costos singulares con horizonte de tiempo finito para resolver problemas de optimización singular, donde los sistemas lineales considerados a estabilizar son Variantes en el Tiempo los cuales son afectados por incertidumbres desconocidas que no crecen indefinidamente, es decir son consideradas acotadas . Además tomando en cuenta la conexión natural existente entre el orden de singularidad de un costo cuadrático variante en tiempo con el orden de la superficie deslizando, es que podemos hacer una representación muy general de superficies deslizando de alto orden , y con la finalidad de obtener superficies de alto orden estabilizantes se recurre a resolver el problema del Regulador Lineal Cuadrático al minimizar un costo cuadrático singular de alto orden mediante la solución de la ecuación diferencial matricial de Riccati. Y con el propósito de que la superficie deslizando de alto orden alcance la correspondiente variedad singular óptima de alto orden en un tiempo prescrito, es que se introduce una superficie deslizando auxiliar cuyo propósito principal será, el de establecer el tiempo en que la superficie deslizando de alto orden alcance su variedad singular óptima de alto orden . También La transformación del Sistema Lineal Variante en Tiempo a la forma canónica controlable variante en tiempo es el paso clave para resolver este tipo de problemas, además con la implementación de los controladores quasi-continuos de alto orden descritos en [48] dotaran a las soluciones del sistema, insensibilidad ante perturbaciones acotadas y acopladas.

Control Óptimo Singular (COS) es un campo de conocimiento (ver [9], [31], [17]) el cual puede ser utilizado en una gran diversidad de problemas en situaciones practicas que van desde economía a la aeronáutica ([20], [64] y [33]). En este último campo particularmente los ingenieros de control hacen frente a problemas con parámetros que cambian en el tiempo como la masa de los cohetes , sondas y tanques. Por lo tanto estos problemas son mejor modelados con coeficientes variantes en el tiempo. El resultado principal en COS fue concebido durante los años 60 y 70. En ese tiempo, uno de los enfoques más comunes para resolver problemas de COS, implica una transformación de los estados y de las variables de control a partir del cual se obtiene un sistema de dimensión reducida y el problema original de control singular es transformado a un problema de control habitual (no-singular) en las nuevas variables, Si esto no se sostiene, entonces se necesitará realizar una transformación a un espacio de estados de dimensión más pequeña (ver [37], [31] y [9]). otros enfoques incluyen el uso de control impulsivo junto con los controles por modos deslizando de primer orden para alcanzar, la variedad singular óptima de alto orden VSO, ésta es la superficie en la cual el costo cuadrático singular alcanza su mínimo. Se sugiere el concepto de control sin penalización para convertir el problema de estabilización singular óptima en un problema de Regulación Lineal Cuadrático singular perturbado para asegurar la rápida convergencia de las soluciones en la Variedad Singular Óptima (ver por ejemplo [17], [43], [65]). cabe mencionar que en la mayoría de estos enfoques, se han estudiado los sistemas invariantes en el tiempo.

En este capítulo estudiamos el problema de control singular de alto orden, esto es, problemas con dimensión arbitraria reducida del sistema asociado para una planta lineal con parámetros variantes en

tiempo. En el libro ([73] capítulo 6), este problema fue primeramente estudiado y una superficie deslizante variante en el tiempo basada en una VSO variante en el tiempo (VSOVT) fue diseñada, entonces un modo deslizante de primer orden es aplicado para resolver el problema. Sin embargo algunos aspectos importantes no fueron mencionados, tal como: problemas para sistemas singulares con dimensión más pequeña o problemas de alto orden, además el tiempo de convergencia a la VSOVT no fue especificado y la robustez de la solución con respecto a perturbaciones acotadas no fue mencionada.

Contribución

En este capítulo proponemos una Superficie Deslizante Integral de Alto Orden (SDIAO) descrito en ([49]) para resolver problemas de estabilización singular óptima para sistemas lineales inciertos variantes en el tiempo: Las principales contribuciones son las siguientes:

- una noción del orden de singularidad del problema lineal cuadrático variante en tiempo es introducido;
- la conexión natural entre el orden de singularidad y el orden del modo deslizante es introducido;
- basado en el orden de singularidad, se describe en detalle un algoritmo para el diseño de la SDIAO el cual tiene como consecuencias :
 - alcanzar la Variedad Singular Óptima Variante en Tiempo (VSOVT) en un instante de tiempo deseado;
 - mantener las soluciones del sistema sobre la VSOVT;
 - asegurar la insensibilidad de las trayectorias del sistema con respecto a incertidumbres acopladas y acotadas.

Ejemplo 15. Permitamos presentar un ejemplo simple. Considere el sistema nominal variante en tiempo

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (4.1.1)$$

con $y(t_0) = y_0$

donde $\beta_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) son parámetros variantes en tiempo. el problema de control es minimizar el siguiente funcional de costo:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} (q_{11}(t) y_1^2 + q_{12}(t) y_2^2 + q_{13}(t) y_3^2) dt \quad (4.1.2)$$

La función de costo (4.1.2) con coeficientes variantes en tiempo q_{1i} ($i = 1, 2, 3$) no contiene la variable de control, por lo tanto, el problema lineal cuadrático (4.1.1) - (4.1.2) es singular. El tiempo inicial de optimización t_1 será especificado posteriormente. La variable y_3 será tomada como una variable de control virtual (4.1.2) (ver [37], [31]). Por lo tanto el problema para y_3 como la variable de control es el de minimizar (4.1.2) que está sujeta a las dinámicas reducidas

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_1 &= A_1 \tilde{y}_1 + B_1 y_3 \\ \text{donde } \tilde{y}_1 &:= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}^\top \\ &\quad y \\ A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde \tilde{y}_1 y y_3 representan las nuevas variables de estado.

Para dar solución a este problema es necesario encontrar la solución del regulador lineal cuadrático, por lo que el control virtual óptimo es dado por

$$y_3 = -R_1^{-1} B_1^T P_1(t) \tilde{y}_1 \quad (4.1.3)$$

donde $P_1(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es solución de la siguiente ecuación diferencial de Riccati con condición de frontera :

$$\begin{aligned} -\dot{P}_1(t) &= P_1(t) A_1 + A_1^T P_1(t) - P_1(t) B_1 R_1^{-1}(t) B_1^T P_1(t) + Q(t) \\ Q(t) &:= \begin{pmatrix} q_{11}(t) & 0 \\ 0 & q_{12}(t) \end{pmatrix}; \quad P_1(t_f) = 0; \quad R_1 := q_{13} \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Definiendo la siguiente superficie deslizante:

$$\begin{aligned} S_1(y, t) &= y_3 + M_1(t) \tilde{y}_1 \\ M_1(t) &:= R_1^{-1}(t) B_1^T P_1(t) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Notemos que se obtiene una Variedad Singular Óptima Variante en Tiempo (VSOVT) cuando en (4.1.5) $S_1(y, t) = 0$ es alcanzada en un tiempo finito t_1 y permanece en cero para todo $t_1 < t \leq t_f$, entonces el índice (4.1.2) toma su valor mínimo para las soluciones de $S_1(y, t) = 0$ que van desde t_1 a un tiempo final t_f (ver [73]). Tomando la derivada con respecto al tiempo de $S_1(y, t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1(y, t) &= \beta_1(t) y_1 + \beta_2(t) y_2 + \beta_3(t) y_3 \\ &\quad + \dot{M}_1(t) \tilde{y}_1 + M_1(t) \dot{\tilde{y}}_1 + u \end{aligned}$$

observamos que la variable de control u aparece en la primer derivada de $S_1(y, t)$. Esto implica que un modo deslizante de primer orden puede mantener las variables del sistema en $S_1(y, t) = 0$, (ver [73] capítulo 9, [18]). A continuación Consideremos el siguiente problema de optimización:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} (q_{21}(t) y_1^2 + q_{22}(t) y_2^2) dt \quad (4.1.6)$$

este problema de optimización es singular con respecto a la variable y_3 y u . Tomando y_2 como nuevo control virtual, el problema ahora es minimizar (4.1.6) sujeto a las dinámicas $\dot{y}_1 = A_2 y_1 + B_2 y_2$, con $A_2 = 0$ y $B_2 = 1$. Entonces el control virtual óptimo es dado por:

$$y_2 = -R_2^{-1}(t) P_2(t) y_1 \quad (4.1.7)$$

donde $P_2(t) \in \mathbb{R}$ es la solución de la ecuación diferencial de Riccati:

$$\begin{aligned} -\dot{P}_2(t) &= P_2(t) A_2 + A_2^T P_2(t) - P_2(t) B_2 R_2^{-1}(t) B_2^T P_2(t) + q_{21} \\ P_2(t_f) &= 0; \quad R_2 := q_{22}(t) \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

definiendo la superficie S_2 como

$$\begin{aligned} S_2(y, t) &= y_2 + M_2(t) y_1 \\ M_2(t) &:= R_2^{-1}(t) P_2(t) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Ahora

$$\begin{aligned} \dot{S}_2(y, t) &= y_3 + M_2(t) y_2 + \dot{M}_2(t) y_1 \Rightarrow \\ \ddot{S}_2(y, t) &= (\beta_1(t) + \ddot{M}_2(t)) y_1 + (\beta_2(t) + 2\dot{M}_2(t)) y_2 \\ &\quad + (\beta_3(t) + M_2(t)) y_3 + u \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Esto significa que $S_2(y, t)$ tiene grado relativo 2. Para mantener la solución de (4.1.1) en la superficie $S_2(y, t) = \dot{S}_2(y, t) = 0$ el controlador por modos deslizantes de segundo orden es requerido ([48]). Considera el último problema de optimización

$$J_3 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} q_{31}(t) y_1^2(t) dt. \quad (4.1.11)$$

La superficie para este problema es solo un punto en el origen. En este caso el grado relativo es 3 y un control por modos deslizantes de tercer orden ([48]) es necesitado para mantener el sistema en el origen. Claramente las variables juegan en la funcional de costo directamente una relación con el orden del modo deslizante (ver [23]).

4.2. CASO GENERAL

Considera el siguiente sistema lineal perturbado variante en tiempo.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)(u + \zeta), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$ es el control de entrada, y $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, son matrices variantes en tiempo y la perturbación satisface

$$|\zeta(t, x)| \leq L, \quad L > 0. \quad (4.2.2)$$

es acotado y Lebesgue- medible sobre t . Por otra parte, de aquí en adelante vamos a suponer que la solución del sistema (4.2.1)-(4.2.2) es única en el sentido de Filippov ([21]) para todo $t \geq t_0$. y Asumimos que el sistema es uniformemente controlable (ver [13]). El problema de optimización para las dinámicas de (4.2.1) podría no estar bien planteado porque el sistema(4.2.1) es incierto.

Esto es porque el sistema (4.2.1) considera el problema lineal cuadrático singular nominal con coeficientes temporales:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.2.3)$$

Consideramos una cuadrática en los estados y un costo *libre de control* cuando el peso de la matriz es también variante en tiempo. es decir

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} x^\top(t) Q(t) x(t) dt \quad (4.2.4)$$

donde $Q(t) = Q^\top(t) \geq 0$, es una matriz semi-definida positiva $\forall t \geq t_0$ y $t_1 > t_0$, t_0 es el estado de tiempo inicial. La función de costo no depende de control esto es porque este problema conduce a la solución del problema de control óptimo singular.

La solución del tiempo finito en el problema singular (4.2.3) - (4.2.4) se encuentra en la variedad singular óptima variable en el tiempo.

4.3. OPTIMIZACIÓN SINGULAR DE ALTO ORDEN PARA SISTEMAS LINEALES VARIANTES EN TIEMPO.

TRANSFORMACIÓN A LA FORMA CANÓNICA DE FASE VARIABLE

Permitamonos considerar que el sistema (4.2.3) como controlable de manera uniforme [32]. La siguiente transformación es basada en el procedimiento dado en ([63]), considerando la transformación no lineal

$$y(t) = T(t) x(t), \quad (4.3.1)$$

derivando a (4.3.1) y tomando en consideración a (4.2.3) obtenemos

$$\dot{y} = \left(T(t) A(t) + \dot{T}(t) \right) T(t)^{-1} y + T(t) B(t) u \quad (4.3.2)$$

donde $T(t)$ es la matriz tal que $A_c = \left(T(t) A(t) + \dot{T}(t) \right) T(t)^{-1}$ y $B_c = T(t) B(t)$ las cuales están dadas por:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) & \cdots & \beta_n(t) \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

la cual transforma a (4.2.3) a la forma canónica controlable:

$$\dot{y} = A_c(t) y + B_c u \quad (4.3.4)$$

a su vez la función de costo (4.2.4) es transformada como

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} y^T \tilde{Q}(t) y(t) dt \quad (4.3.5)$$

donde $\tilde{Q}(t) = (T^{-1})^T Q(t) T^{-1}$ por lo que $\tilde{Q}(t)$ toma la siguiente estructura por bloques :

$$\tilde{Q}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11}(t) & \tilde{Q}_{12}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{Q}_{21}(t) & \tilde{Q}_{22}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \tilde{Q}_{22}(t) > 0, \tilde{Q}_{21}(t) \geq 0 \\ \forall t \geq t_0 \end{matrix} \quad (4.3.6)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-k \text{ columns}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{k \text{ columns}}$

las matrices de bloques involucradas tienen dimensión $\tilde{Q}_{22}(t) \in \mathbb{R}$, $\tilde{Q}_{11}(t) \in \mathbb{R}^{(n-k-1) \times (n-k-1)}$, $\tilde{Q}_{12}(t) = \tilde{Q}_{21}^T(t) \in \mathbb{R}^{(n-k-1) \times 1}$. El ejemplo previo en el que la variable de control puede aparecer en derivadas sucesivas de la Variedad Singular Variante en Tiempo motiva a la siguiente definición.

Definición 7. Para un problema de control singular dado, el Orden de Singularidad puede ser visto como $i = k + 1$, y k es el número de columnas cero en (4.3.6). Para el propósito de claridad, definimos los vectores $\tilde{y}_1 = (y_1, y_2, \dots, y_{n-k-1})^T$ que representan las dinámicas reducidas de variables de estado que aparecen en el modo deslizante, y $\tilde{y}_2 = y_{n-k}$ una variable de control virtual..

Observación 9. El orden de singularidad puede tomar cualquier valor desde 1 a n, Este corresponde a todos los posibles problemas de control de alto orden para el índice (4.3.5), hasta el punto de minimizar un funcional que depende solo de la primer coordenada.

Procedimiento para encontrar la transformación $T(t)$

Asumimos que las entradas de las matrices $A(t)$ y $B(t)$ son funciones infinitamente diferenciables. En esta sección se omite la notación dependiente del tiempo en algunos lugares en los que es evidente su dependencia temporal.

Como es mostrado en([63]) la condición necesaria y suficiente para la existencia única de la matriz de transformación $T(t)$ es la controlabilidad uniforme del sistema (4.2.3) (ver [63]). En lo que sigue se describe el procedimiento para encontrar T . Sean los componentes del vector $y(t)$ en (4.3.4) representados como:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= T_{11}x_1 + T_{12}x_2 + \cdots + T_{1n}x_n = T_1x \\ y_2(t) &= T_{21}x_1 + T_{22}x_2 + \cdots + T_{2n}x_n = T_2x \\ &\vdots \\ y_n(t) &= T_{n1}x_1 + T_{n2}x_2 + \cdots + T_{nn}x_n = T_nx \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

donde $x(t)$ es el vector de estados (4.2.3), y $T_{ij}(t)$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ son los componentes de los renglones variantes en tiempo de $T(t)$, esto es

$$T_i(t) = (T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{in})$$

tomando la derivada temporal de(4.3.1) obtenemos

$$\dot{y}(t) = (\dot{T} + TA)x(t) + TBu(t) \quad (4.3.8)$$

el sistema (4.2.3) en variables canónicas (4.3.2) hace los renglones de (4.3.8) iguales a:

$$\begin{aligned} y_2 = \dot{y}_1 &= \left(\dot{T}_1 + T_1A \right) x + T_1Bu(t) \\ y_3 = \dot{y}_2 &= \left(\dot{T}_2 + T_2A \right) x + T_2Bu(t) \\ &\vdots \\ y_n = \dot{y}_{n-1} &= \left(\dot{T}_{n-1} + T_{n-1}A \right) x + T_{n-1}Bu(t) \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

haciendo $T_1B = T_2B = \dots = T_{n-1}B = 0$, las componentes de $T(t)x(t)$ llegan a ser

$$\begin{aligned} T_2x &= \left(\dot{T}_1 + T_1A \right) x \\ T_3x &= \left(\dot{T}_2 + T_2A \right) x \\ &\vdots \\ T_nx &= \left(\dot{T}_{n-1} + T_{n-1}A \right) x \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Por lo tanto para poder encontrar $T(t)$ los renglones deben satisfacer:

$$T_k = \left(\dot{T}_{k-1} + T_{k-1}A \right) \text{ para } k = 2, \dots, n \quad (4.3.11)$$

junto con las igualdades $T_1B = T_2B = \dots = T_{n-1}B = 0$. También porque de (4.3.4) $TB = B_c$ obtenemos

$$B_c = \begin{pmatrix} T_1B \\ T_2B \\ \vdots \\ T_{n-1}B \\ T_nB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.12)$$

usando (4.3.11) y (4.3.12) se cumple que:

$$\begin{aligned}
T_1 B &= T_1 q_1 = 0, \\
T_2 B &= \left(\dot{T}_1 + T_1 A \right) B = -T_1 q_2 = 0 \\
T_3 B &= \left(\dot{T}_2 + T_2 A \right) B = T_1 q_3 = 0 \\
&\vdots \\
T_n B &= \left(\dot{T}_{n-1} + T_{n-1} A \right) B = T_1 q_n (-1)^{n-1} = 1
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

donde $q_i, (i = 1, \dots, n)$ son las columnas de la matriz de controlabilidad C de (4.2.3), donde se ha usado el hecho de que $d(T_1 B)/dt = \dot{T}_1 B + T_1 \dot{B} = 0$, $d(T_1 q_2)/dt = \dot{T}_1 q_2 + T_1 \dot{q}_2 = 0, \dots, d(T_1 q_{n-1})/dt = \dot{T}_1 q_{n-1} + T_1 \dot{q}_{n-1}$. Por lo que la ecuación (4.3.12) puede ser escrita como:

$$B_c = \begin{pmatrix} T_1 B \\ T_2 B \\ \vdots \\ T_{n-1} B \\ T_n B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 q_1 \\ T_1 q_2 \\ \vdots \\ T_1 q_{n-1} \\ T_1 q_n (-1)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.3.14}$$

o bien

$$T_1 [q_1, q_2, \dots, q_n] = (-1)^{n-1} [0, 0, \dots, 0, 1]$$

finalmente obtenemos que

$$T_1 C = (-1)^{n-1} [0, 0, \dots, 0, 1]$$

donde C es dada por

$$C = [q_1, q_2, \dots, q_n] \tag{4.3.15}$$

Si C es una matriz no singular entonces el renglón T_1 existe de forma única, entonces:

$$T_1 = (-1)^{n-1} [0, 0, \dots, 0, 1] C^{-1}$$

Una vez que T_1 ha sido encontrado el resto de los renglones pueden ser calculados usando la recursión (4.3.11) desde $k = 2, \dots, n$. La matriz de controlabilidad C (4.3.15) puede ser encontrada teniendo en cuenta que cada uno de sus vectores columna q_i desde $i = 1, 2, \dots, n$. está dado por:

$$\begin{aligned}
q_1 &= B \\
q_2 &= \dot{q}_1 - A q_1 \\
&\vdots \\
q_n &= \dot{q}_{n-1} - A q_{n-1}
\end{aligned}$$

Transformación del funcional

La función de costo (4.3.5) involucra términos cruzados en las variables de estado, con el fin de obtener un problema más sencillo se define una nueva variable auxiliar ν_i ([73]):

$$\nu_i(t) = \tilde{y}_2 + L_i(t) \tilde{y}_1; \quad L_i(t) := \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \tilde{Q}_{12}^T(t) \tag{4.3.16}$$

usando la definición para los estados y las variables de control (\tilde{y}_1, v_i) , la función de costo (4.3.5) es transformada a:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} \left(\tilde{y}_1^T(t) \hat{Q}_{11}(t) \tilde{y}_1(t) + \nu_i^T(t) \tilde{Q}_{22}(t) \nu_i(t) \right) dt \quad (4.3.17)$$

donde la matriz

$$\hat{Q}_{11}(t) = \tilde{Q}_{11}(t) - \tilde{Q}_{12}(t) \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \tilde{Q}_{12}^T(t).$$

Diseño de la variedad singular variante en tiempo:

Para cada problema de optimización singular de alto orden para sistemas lineales en tiempo se tiene el siguiente resultado. Para cada orden de singularidad i , minimizar el índice de ejecución (4.3.5), sujeta a las dinámicas (4.3.4). Nota que en el sistema dado por variables canónicas (4.3.4) solo la última coordenada es dependiente del tiempo, no obstante la variedad singular (para cada problema singular) sigue siendo variante en tiempo debido a las matrices asociadas de la función de costo. Para conocer las condiciones de Óptimalidad para cada índice, tomamos de nuevo la última coordenada como variable de control virtual y minimizamos (4.3.17), sujeta a las dinámicas parciales:

$$\dot{\tilde{y}}_1 = \left(A_i - B_i \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \tilde{Q}_{12}^T(t) \right) \tilde{y}_1 + B_i \nu_i(t) \quad (4.3.18)$$

donde A_i y B_i son matrices constantes de la forma::

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}; \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} n-i \text{ renglones} \end{array} \right. \quad (4.3.19)$$

con $\tilde{y}_1 \in \mathbb{R}^{n-i}$, $\tilde{Q}_{22}(t) \in \mathbb{R}$, $\tilde{Q}_{12}(t) \in \mathbb{R}^{n-i}$

la dimensión de las matrices son bien definidas. El siguiente teorema es una extensión de alto orden de los resultados concernientes a el problema de la Variedad Singular Óptima de primer orden visto en ([73]).

Teorema 6. *El valor óptimo que actúa como variable de control virtual que minimiza en (4.3.5) es*

$$\tilde{y}_2 = - \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \left(B_i^T P_i + \tilde{Q}_{12}^T \right) \tilde{y}_1 \quad (4.3.20)$$

donde P_i , es la solución de la ecuación matricial diferencial de Riccati

$$-\dot{P}_i(t) = P_i(t) \tilde{A}_i(t) + \tilde{A}_i^T(t) P_i(t) + \hat{Q}_{11}(t) - P_i(t) B_i \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} B_i^T P_i(t) \quad (4.3.21)$$

con condiciones de frontera $P_i(t_f) = 0$, donde:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i(t) &= A_i - B_i \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \tilde{Q}_{12}^T(t); \\ \hat{Q}_{11}(t) &= \tilde{Q}_{11}(t) - \tilde{Q}_{12}(t) \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \tilde{Q}_{12}^T(t) \end{aligned}$$

Diseño de la trayectoria Transitoria para Alcanzar la VSO

En el caso general la funcional de costo (4.3.5) no está optimizada desde el principio del proceso (4.3.4), la condición inicial no pertenece a la VSO, Por tanto el tiempo inicial t_1 debería ser especificado. Consideramos a la VSO como

$$S_i(y, t) = \tilde{y}_2 + M_i(t) \tilde{y}_1 = 0 \quad (4.3.22)$$

donde $M_i(t) = \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \left(B_i^T P_i + \tilde{Q}_{12}^T \right)$. Asumimos que para j tenemos $S_i^{(j)}(y_0, t_0) \neq 0$. Nos gustaría que las trayectorias del sistema alcancen el conjunto de modos deslizantes de i -ésimo orden $S_i(y(t_1)) = \dot{S}_i(y(t_1)) = \dots = S_i^{(i-1)}(y(t_1)) = 0$ en tiempo finito t_1 .

Permitamos definir una trayectoria de transición $\mu_i(t)$ definida para $t_0 \leq t \leq t_1$ como un polinomio de la forma:

$$\mu_i(t) = (t - t_1)^i \left(c_0 + c_1(t - t_0) + \dots + c_{i-1}(t - t_0)^{i-1} \right) \quad (4.3.23)$$

que satisface las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mu_i(t_0) &= S_i(y_0), \dot{\mu}_i(t_0) = \dot{S}_i(y_0), \dots, \mu_i^{(i-1)}(t_0) \\ &= S_i^{(i-1)}(y_0). \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

En el tiempo de llegada sobre la VSO t_1 tenemos

$$\mu_i(t_1) = \dot{\mu}_i(t_1) = \dots = \mu_i^{(i-1)}(t_1) = 0$$

y $\mu_i(t) = 0 \forall t > t_1$. Los parámetros c_i pueden ser únicamente definidos de (4.3.24). se define la función $t_1 - t_0$ como una función definida positiva de condiciones iniciales como

$$t_1 - t_0 = T_i \left(S_i(y_0), \dot{S}_i(y_0), \dots, S_i^{(i-1)}(y_0) \right); \quad (4.3.25)$$

Para cualquier $\lambda, p = \text{constante} > 0$ la función T_i podría ser únicamente definida como [49] :

$$T_i = \lambda \left(|S_i(y_0)|^{p/i} + |\dot{S}_i(y_0)|^{p/(i-1)} + \dots + |S_i^{(i-1)}(y_0)|^p \right)^{1/p} \quad (4.3.26)$$

La función $\mu_i(t)$ es únicamente determinada por (4.3.24), (4.3.23) y (4.3.25).

Definimos una superficie auxiliar como $\sum_i(y) = S_i(y) - \mu_i(t)$, de tal manera que cuando el controlador quasicontinuo de orden i logre hacer que $\sum_i(y)$ sea cero en algún tiempo finito t_r , se tendrá que $S_i(y(t_r)) = \mu_i(t_r)$, y además recordemos que $\mu_i(t \geq t_1) = 0$, y si además se cumple que $t_1 \geq t_r$, entonces el tiempo de convergencia a cero de S_i será el mismo en el cual μ_i se hace cero por primera vez. es decir t_1 .

Diseño del Algoritmo del Modo Deslizante Integral de Alto Orden

Ahora de ([50]). concluimos el siguiente teorema:

Teorema 7. *El control*

$$v_i = \Phi_i \Psi_{i-1,i}(\Sigma_i, \dot{\Sigma}_i, \dots, \Sigma_i^{(i-1)}); \quad \varphi_{0,i} = \Sigma_i; \quad N_{0,i} = |\Sigma_i|; \quad (4.3.27)$$

$$\Psi_{0,i} = \varphi_{0,i}/N_{0,i} = \text{sign}\Sigma_i; \quad \varphi_{l,i} = \Sigma_i^{(l)} + \beta_i N_{l-1,i}^{(i-l)/(i-l+1)} \Psi_{l-1,i}$$

$$N_{l,i} = \left| \Sigma_i^{(l)} \right| + \beta_i N_{l-1,i}^{(i-l)/(i-l+1)}; \quad \Psi_{l-1,i} = \varphi_{l,i}/N_{l,i},$$

$$\Sigma_i(t, y) = \begin{cases} S_i(y) - \mu_i(t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\ S_i(y), & t \geq t_1 \end{cases} \quad (4.3.28)$$

establece el modo deslizante óptimo de orden i en el que se satisface $S_i(y_0) = \dot{S}_i(y(t)) = \dots = S_i^{(i-1)}(y(t)) \equiv 0$ para $t \geq t_1$.

Observación 10. La igualdad $S_i(y(t)) = \mu_i(t)$, es mantenida durante el proceso de transición $t_r \leq t \leq t_1$. donde t_r es el tiempo en el que $\Sigma_i(t, y)$ converge a cero.

El control quasicontinuo de alto orden ([48],[50]) para $i = 1, 2, 3, 4$ toma la forma :

$$v_1 = -\Phi_1 \text{sign}\Sigma_1,$$

$$v_2 = -\Phi_2 \left(\dot{\Sigma}_2 + |\Sigma_2|^{1/2} \text{sign}\Sigma_2 \right) / \left(\left| \dot{\Sigma}_2 \right| + |\Sigma_2|^{1/2} \right),$$

$$v_3 = -\Phi_3 \frac{\left[\ddot{\Sigma}_3 + 2 \left(\left| \dot{\Sigma}_3 \right| + |\Sigma_3|^{2/3} \right)^{-1/2} \left(\dot{\Sigma}_3 + |\Sigma_3|^{2/3} \text{sign}\Sigma_3 \right) \right]}{\left[\left| \ddot{\Sigma}_3 \right| + 2 \left(\left| \dot{\Sigma}_3 \right| + |\Sigma_3|^{2/3} \right)^{1/2} \right]},$$

$$v_4 = -\Phi_4 \varphi_{3,4}/N_{3,4},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{3,4} = & \ddot{\Sigma}_4 + 3 \left[\ddot{\Sigma}_4 + \left(\left| \dot{\Sigma}_4 \right| + 0.5 |\Sigma_4|^{3/4} \right)^{-1/3} \left(\dot{\Sigma}_4 + 0.5 |\Sigma_4|^{3/4} \text{sign}\Sigma_4 \right) \right] \\ & \times \left[\left| \ddot{\Sigma}_4 \right| + \left(\left| \dot{\Sigma}_4 \right| + 0.5 |\Sigma_4|^{3/4} \right)^{2/3} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

y

$$N_{3,4} = \left| \ddot{\Sigma}_4 \right| + 3 \left[\ddot{\Sigma}_4 + \left(\left| \dot{\Sigma}_4 \right| + 0.5 |\Sigma_4|^{3/4} \right)^{-2/3} \right]^{1/2}, \quad (4.3.30)$$

4.4. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Para resumir el procedimiento del diseño, tenemos el siguiente algoritmo:

PASO 1: Transformación del sistema (4.2.1) a la forma canónica de fase variable (4.3.4).

PASO 2: Transformación de la funcional (4.2.4) a la forma transformada(4.3.5).

PASO 3: Diseñar la superficie deslizante variante en el tiempo $S_i(y, t)$ mediante la solución analítica o numérica de la correspondiente ecuación diferencial de Riccati (4.3.21)

PASO 4: Diseñar la Superficie auxiliar $\sum_i (y, t) = S_i(y) - \mu_i(t)$ para encontrar los coeficientes c_0, c_1, \dots, c_{i-1} del polinomio $\mu_i(t)$, usando las condiciones (4.3.24).

PASO 5: Diseñar un tiempo de convergencia deseado t_1 con una condición inicial dada t_0 y un valor propuesto λ , considerando (4.3.25) y (4.3.26).

PASO 6: Diseñar el correspondiente *Control Quasicontinuo Integral de Alto Orden*.

4.5. EJEMPLO NUMÉRICO

Considera el siguiente SLVT

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)(u + \xi), \quad x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

y la función de costo asociada como:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} x^T Q(t) x(t) dt$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & e^{-t} & t \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & t^2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}^3; \quad \xi = 2 \cos(2t) + \cos(x_1 + x_2 + x_3) + 1.5;$$

y

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4e^{2t} & 4e(t^2 + 1) \\ 0 & 4e^{2t}(t^2 + 1) & 4e^{2t}(t^2 + 1)^2 + e^{2t} \end{pmatrix}$$

Y podemos ver que la perturbación es acotada $|\xi| \leq 4.5$ y $Q(t) = Q^T(t) \geq 0$.

PASO 1 : La transformación del sistema. La matriz T que transforma el sistema original a la forma canónica de fase variable es

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^t \\ 0 & e^t & (t^2 + 1)e^t \\ e^t & (t^2 - 1)e^t & (t^4 + 2t^2 + 2t + 1)e^t \end{pmatrix} \quad (4.5.1)$$

En las nuevas coordenadas el sistema toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (4.5.2)$$

donde los coeficientes $\beta_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) son dados por

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= 5t - e^{-t} - t^2 e^{-t} + 2 \\ \beta_2(t) &= 4t + e^{-t} + 2t^2 + 2 \\ \beta_3(t) &= t^2 - 1 \end{aligned}$$

PASO 2: Transformación del funcional. Aplicando la matriz $T(t)$ dada en (4.5.1)

Entonces la matriz de costo transformada $\tilde{Q}(t)$ es dada por

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(t) &= (T^{-1})^T Q(t) T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

y el funcional de costo tomará la forma:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} (y_1^2 + 4y_2^2) dt \quad (4.5.3)$$

sujeta a las dinámicas

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= A_2 y_1 + B_2 y_2 \\ A_2 &= 0, B_2 = 1\end{aligned}$$

el control virtual óptimo y_2 es:

$$y_2 = -\frac{1}{4} P_2(t) y_1 \quad (4.5.4)$$

donde $P_2(t) \in \mathbb{R}$ es la solución de la ecuación diferencial de Riccati:

$$-\dot{P}_2(t) = -P_2(t)^2 / 4 + 1 \quad (4.5.5)$$

con $P_2(t_f) = 0$. si tomamos $t_f = 10$,

PASO 3: Diseño de la superficie deslizante S_2 . Tenemos que la solución analítica de la ecuación diferencial de Riccati dada en (4.5.5) necesaria para el diseño de S_2 es dada por

$$P_2(t) = 2(1 - e^{(t-10)}) / (e^{(t-10)} + 1), \quad P_2(10) = 0$$

por consiguiente la superficie deslizante variante en tiempo es

$$\begin{aligned}S_2 &= y_2 + M_2(t) y_1 \\ M_2(t) &= \frac{1}{4} P_2(t).\end{aligned}$$

PASO 4: Diseño de la superficie auxiliar $\sum_2(y, t)$.

De acuerdo a que el orden de singularidad es $i = 2$ entonces tendremos que la superficie auxiliar es dada por:

$$\sum_2(y) = S_2(y) - \mu_2(t) \quad (4.5.6)$$

por tanto el polinomio (4.3.23) toma la forma:

$$\mu_2(t) = (t - t_1)^2 (c_0 + c_1(t - t_0))$$

donde $t_0 = 0$, es el tiempo inicial de las variables de estado x , por tanto tenemos que

$$\mu_2(t) = (t - t_1)^2 (c_0 + c_1 t). \quad (4.5.7)$$

Para poder diseñar la superficie auxiliar $\sum_2(y)$ de forma completa solo falta encontrar los coeficientes del polinomio $\mu_2(t)$ los cuales estarán dados por:

$$c_0 = S_2(0) / t_1^2$$

$$c_1 = \dot{S}_2(0) / t_1^2 + 2c_0 / t_1.$$

PASO 5: Diseñar un tiempo de convergencia deseado t_1 .

Tenemos que la condición inicial $t_0 = 0$ y un con un valor propuesto λ , y con las consideraciones dadas en (4.3.25) y (4.3.26) tenemos que el tiempo de alcance es:

$$t_1 = T_2 \left(S_2(0), \dot{S}_2(0) \right)$$

$$T_2 = \lambda \left(|S_2(0)|^3 + \left| \dot{S}_2(0) \right|^6 \right)^{1/6}$$

para la condición inicial $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = -4$, $y_3(0) = 5$, con $P_2(10) = 0$, y $k_{11} = 50$; $k_{12} = 50$, $S_2(0) = -2.5001$, $\dot{S}_2(0) = 3.0003$ se encuentra que $c_0 = -4.4125$, $c_1 = -6.4286$ y tomando $\lambda = 0.25$; obtenemos $t_1 = T_2 = 0.7527$. Finalmente solo falta diseñar el correspondiente control quasi-continuo integral de alto orden.

PASO 6: Diseño del control quasi-continuo integral de alto orden.

Puesto que el orden de singularidad es $i = 2$, entonces se utilizará un control quasicontinuo integral de segundo orden, el cual está expresado por:

$$u = -\Phi_1(y) \frac{\left[\dot{\Sigma}_2 + |\Sigma_2|^{1/2} \text{Sign}(\Sigma_2) \right]}{\left[\left| \dot{\Sigma}_2 \right| + |\Sigma_2|^{1/2} \right]}$$

con una ganancia variable dada por:

$$\Phi_1(y) = 50\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} + 50$$

en lo que sigue se muestran las siguientes figuras de simulación:

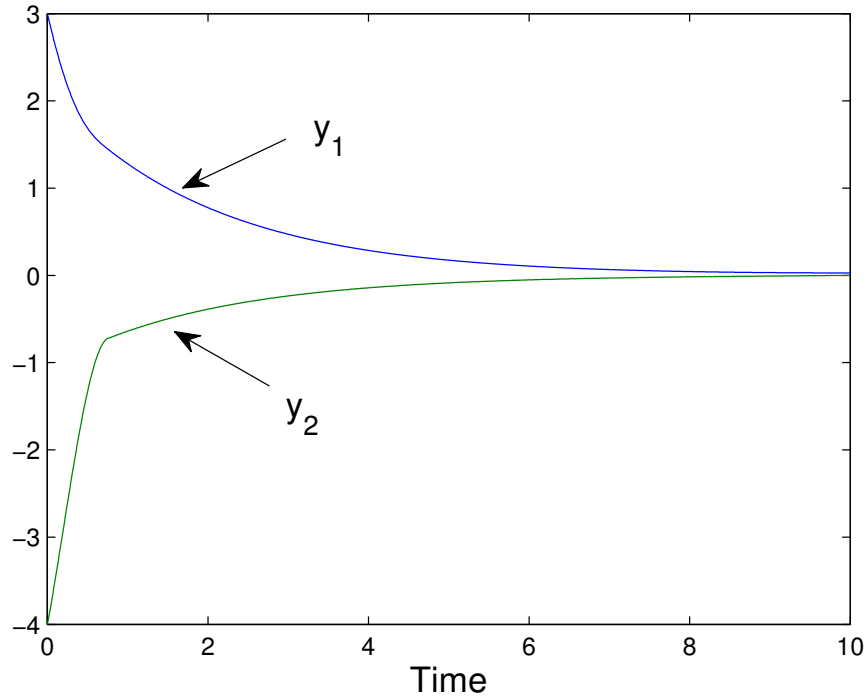


Figura 4.5.1: estados del Sistema.

En figura (4.5.1) vemos como las dinámicas y_1 y y_2 están tendiendo a cero conforme el tiempo transcurre, sin embargo las soluciones que se consideran Óptimas son aquellas para las que $t \geq t_1$, esto es porque t_1 es el tiempo en que la superficie deslizante S_2 converge a la superficie deslizante óptima $S_2 = 0$, y a partir de este instante de tiempo y en adelante se puede decir que las soluciones son las Óptimas y necesarias para minimizar a (4.5.3) para todo $t_1 \leq t \leq T_f$.

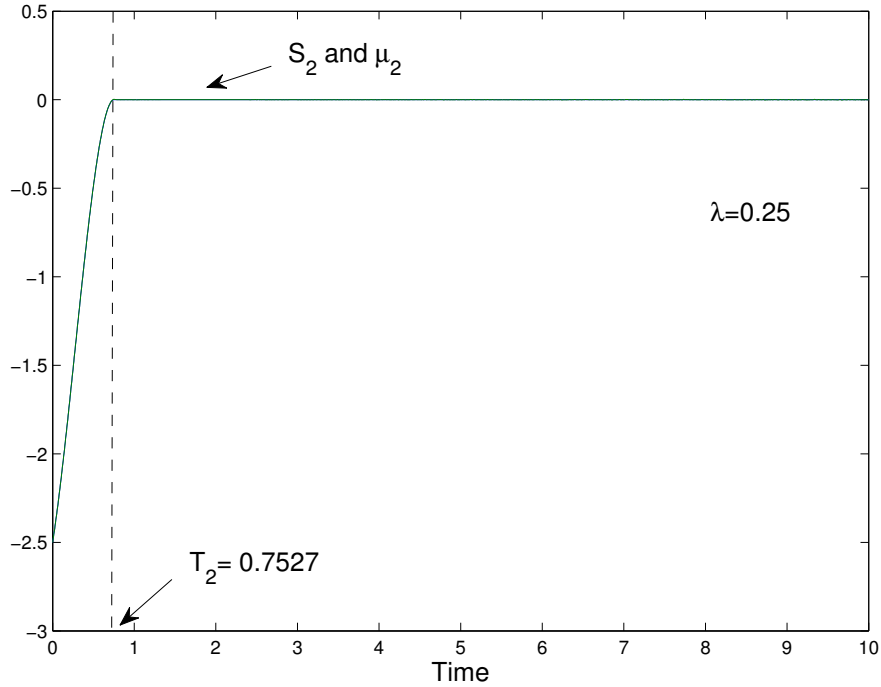


Figura 4.5.2: Tiempo de alcance $t_1 = 0.7527$.

En figura (4.5.2) vemos que el tiempo de convergencia de la superficie deslizante S_2 está dado por $t_1 = T_2 = 0.7527$, el cual concuerda con el tiempo calculado con anterioridad, donde estamos considerando que $\lambda = 0.25$.

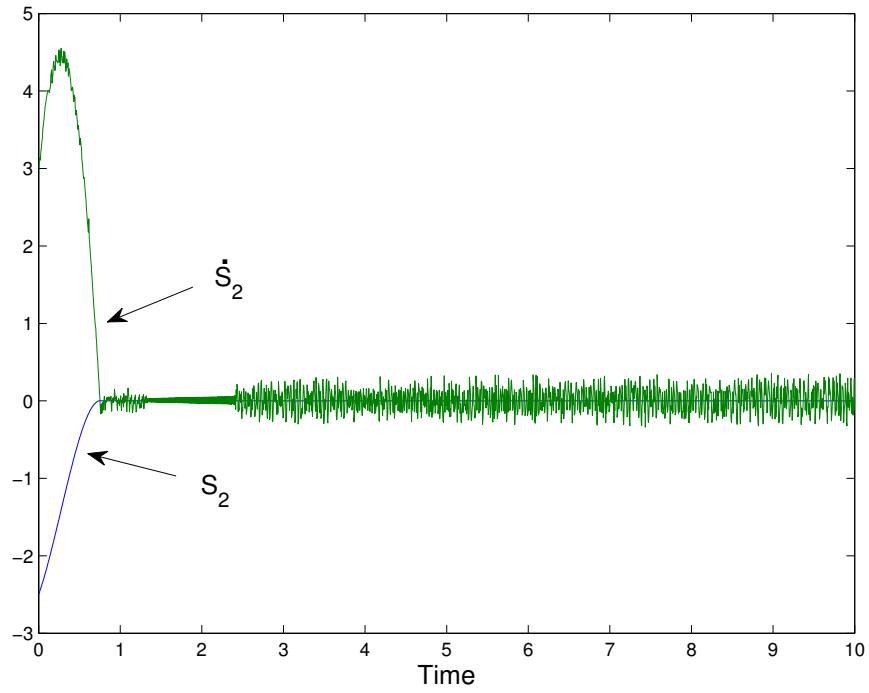


Figura 4.5.3: Superficies Deslizantes

En figura (4.5.3) vemos que la superficie deslizante S_2 y su derivada \dot{S}_2 convergen a cero en un tiempo $t_1 = 0.7527$.

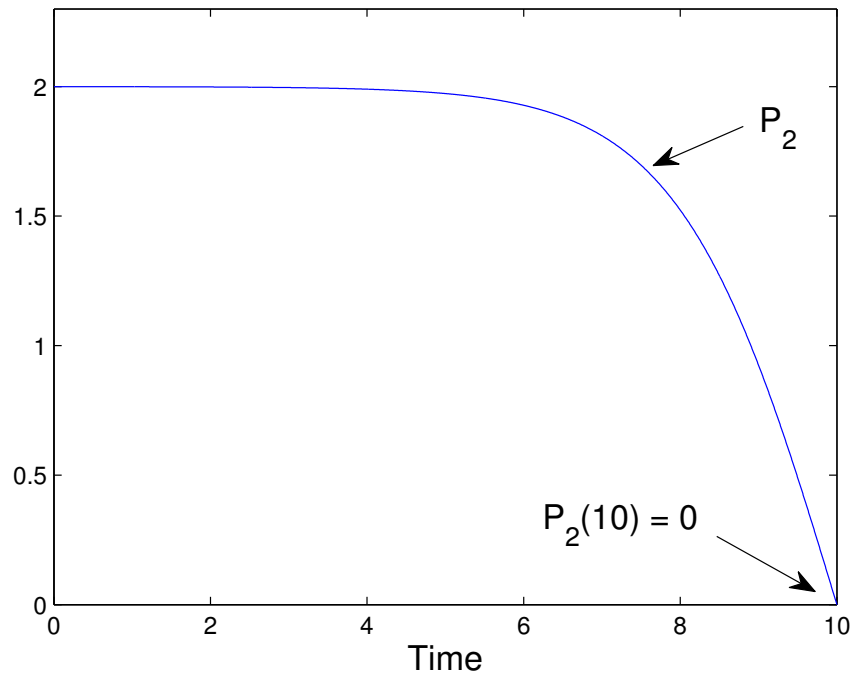


Figura 4.5.4: Solución de Riccati P_2

En figura (4.5.4) tenemos que la solución de la ecuación de Riccati satisface la condición de frontera $P_2(10) = 0$.

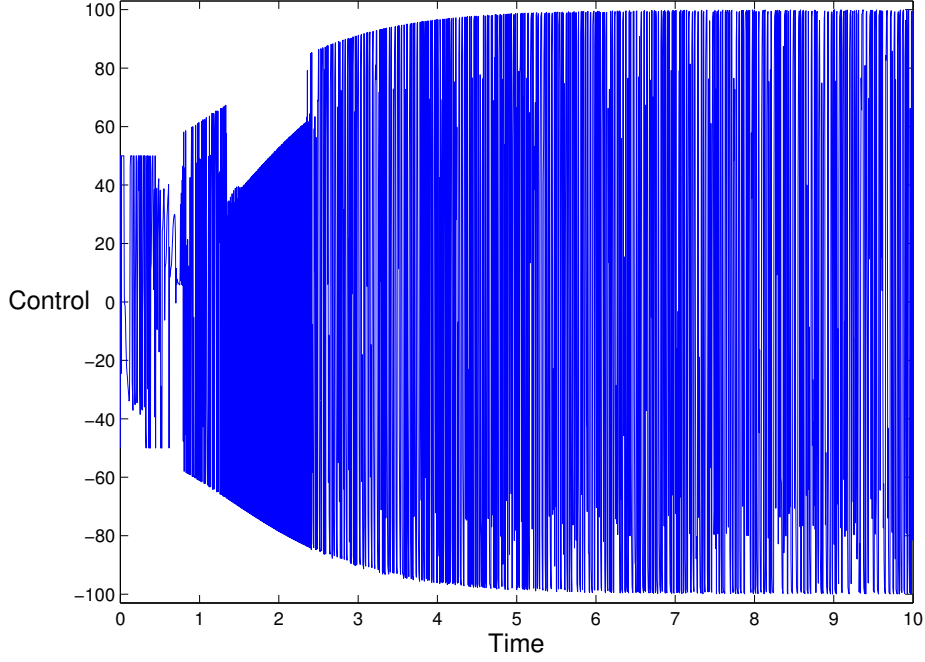


Figura 4.5.5: Control Quasicontinuo de Segundo Orden

En la figura (4.5.5) vemos que el control quasi-continuo de segundo orden está actuando desde el principio es decir en $t_0 = 0$, esto porque trata de mantener la superficie deslizante S_2 lo más junto con el polinomio μ_2 desde el comienzo, esto para asegurar que el tiempo de convergencia a cero de S_2 sea el mismo que el tiempo en el que polinomio μ_2 converge a cero, es decir en $t_1 = 0.7527$.

Donde ahora el funcional de costo (4.5.3) puede escribirse como:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1=0.7527}^{t_f=10} (y_1^2 + 4y_2^2) dt$$

Simplificación del funcional de costo cuadrático singular con horizonte de tiempo finito

Con la finalidad de que en el funcional de costo cuadrático singular transformado $J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} y^T \tilde{Q}(t) y dt$ no aparezcan términos cruzados al momento de realizar su desarrollo algebraico se propone una estructura para $\tilde{Q}(t) = (T^{-1})^T Q(t) T^{-1}$ que corresponde a un caso particular a la mostrada en (4.3.6). El propósito de hacer esto será respondido en esta sección pero antes de esto es necesario dar una breve discusión a lo descrito en las subsecciones pasadas del capítulo 4.

Recordando que al aplicar la matriz de transformación $T(t)$ al funcional de costo original $J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} x^T Q(t) x dt$ tenemos que:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} y^T \tilde{Q}(t) y dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} \left(\tilde{y}_1^T(t) \tilde{Q}_{11}(t) \tilde{y}_1(t) + 2\tilde{y}_1^T(t) \tilde{Q}_{12}(t) \tilde{y}_2(t) + \tilde{y}_2^T(t) \tilde{Q}_{22}(t) \tilde{y}_2(t) \right) dt \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

donde los términos cruzados que aparecen en (4.5.8) se deben a la estructura por bloques que tiene $\tilde{Q}(t)$ mostrada en (4.3.6). Por tal razón, para eliminar los términos cruzados del funcional usamos la sustitución de utkin [73] dada por $\nu(t) = \tilde{y}_2 + L_i(t) \tilde{y}_1$; $L_i(t) := \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \tilde{Q}_{12}^T(t)$.

Entonces tendremos:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} \left(\tilde{y}_1^T(t) \hat{Q}_{11}(t) \tilde{y}_1(t) + \nu_i^T(t) \tilde{Q}_{22}(t) \nu_i(t) \right) dt. \quad (4.5.9)$$

donde la matriz

$$\hat{Q}_{11}(t) = \tilde{Q}_{11}(t) - \tilde{Q}_{12}(t) \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \tilde{Q}_{12}^T(t).$$

Y donde la minimización de J está sujeta al sistema reducido

$$\dot{\tilde{y}}_1 = \left(A_i - B_i \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \tilde{Q}_{12}^T(t) \right) \tilde{y}_1 + B_i \nu(t).$$

Donde $\nu(t) = - \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} B_i^T P_i \tilde{y}_1$ es la variable que actúa como control virtual óptimo, o bien en consideración de que $\nu(t) = \tilde{y}_2 + \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \tilde{Q}_{12}^T(t) \tilde{y}_1$ entonces la variable de control virtual óptimo también puede expresarse por:

$$\tilde{y}_2 = - \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \left(B_i^T P_i + \tilde{Q}_{12}^T \right) \tilde{y}_1.$$

por lo que a partir de este control virtual óptimo se puede diseñar una superficie deslizante dada por

$$S_i = \tilde{y}_2 + \left(\tilde{Q}_{22}(t) \right)^{-1} \left(B_i^T P_i + \tilde{Q}_{12}^T \right) \tilde{y}_1.$$

Donde P_i es solución de la ecuación diferencial de Riccati dada en (4.3.21) por lo que encontrar la solución analítica de $P_i(t)$ supone un reto bastante complicado, mas aún considerando que en el funcional de costo (4.5.9) aparecen matrices variantes en tiempo $\hat{Q}_{11}(t) \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$ y $\tilde{Q}_{22}(t) \in \mathbb{R}$, por tal motivo la manera más razonable de obtener la solución de P_i es por *métodos numéricos de ecuaciones diferenciales*, pero aún así esto se vuelve muy laborioso si se tienen expresiones demasiado grandes con parámetros variantes en el tiempo, y por si fuera poco considerando que el control quasicontinuo de orden i es dependiente de $S_i, \dot{S}_i, \dots, S_i^{i-1}$ donde S_i y sus derivadas posteriores son dependientes de parámetros variantes en el tiempo, por lo que escribir cada una de estas expresiones en computadora se complica gradualmente conforme se deriva a S_i .

Por todo lo anterior con el propósito de evitar que el cómputo de la solución numérica P_i de la ecuación diferencial de Riccati dada en (4.3.21) se complique por tener expresiones variantes en tiempo muy extensas, se propondrá una estructura correspondiente a un caso particular a la mostrada en (4.3.6) esta estructura está dada por:

$$\tilde{Q}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{22}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11}(t) & 0_{n-k-1 \times 1} & 0_{n-k-1 \times k} \\ 0_{1 \times n-k-1} & \tilde{Q}_{22}(t) & 0_{1 \times k} \\ \underbrace{0_{k \times n-k-1} \quad 0_{k \times 1}}_{n-k \text{ columnas}} & \underbrace{0_{k \times k}}_{k \text{ columnas}} \end{pmatrix} \quad (4.5.10)$$

$$\tilde{Q}_{11}(t) > 0 \quad \tilde{Q}_{22}(t) > 0, \quad \tilde{Q}_{21}(t) = 0_{1 \times n-k-1} \\ \forall t \geq t_0$$

donde las matrices por bloques $\tilde{Q}_{11}(t)$ y $\tilde{Q}_{22}(t)$ están expresadas como :

$$\tilde{Q}_{11}(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & q_{33}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-k-1 \ n-k-1}(t) \end{pmatrix}; \quad \tilde{Q}_{22}(t) = q_{n-k \ n-k}(t)$$

donde $q_{ii}(t) > 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n - k$. Por consiguiente con esta consideración se tendrá que el funcional transformado tomará la forma:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} y^T \tilde{Q}(t) y dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} \left(\tilde{y}_1^T(t) \tilde{Q}_{11}(t) \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2^T(t) \tilde{Q}_{22}(t) \tilde{y}_2(t) \right) dt \quad (4.5.11)$$

donde la minimización de (4.5.11) está sujeta al sistema reducido

$$\dot{\tilde{y}}_1 = A_i \tilde{y}_1 + B_i \tilde{y}_2$$

con la partición dada por $\tilde{y}_1 = (y_1, y_2, \dots, y_{n-k-1})$ y $\tilde{y}_2 = y_{n-k}$. con $A_i \in \mathbb{R}^{n-i \times n-i}$ y $B_i \in \mathbb{R}^{n-i}$ como se muestran en (4.3.19), donde además el control virtual óptimo está dado por

$$\tilde{y}_2 = -(\tilde{Q}_{22}(t))^{-1} B_i^T P_i \tilde{y}_1.$$

Por tanto se puede diseñar una superficie deslizante dada por

$$S_i = \tilde{y}_2 + (\tilde{Q}_{22}(t)) B_i^T P_i \tilde{y}_1$$

donde la expresión de la superficie deslizante no es tan laboriosa de introducir en computadora, así como sus derivadas consecuentes, además notemos que no fue necesario aplicar la sustitución de utkin para eliminar términos cruzados, debido a la estructura de $\tilde{Q}(t)$ la cual es presentada como una matriz diagonal con parámetros variantes en el tiempo y positivos. Notemos que si cada componente $q_{ii}(t)$ de la matriz $\tilde{Q}(t)$ son supuestos constantes y positivos, entonces encontrar la solución numérica de la ecuación diferencial de Riccati se vuelve menos complicada.

A continuación se aplicará esta metodología para resolver un ejemplo de simulación, tal ejemplo está basado en controlar el descenso de un cohete espacial sobre la superficie lunar.

4.6. CONTROLABILIDAD DEL DESCENSO DE UN COHETE ESPACIAL SOBRE LA SUPERFICIE LUNAR

esta sección está dedicada a aplicar la teoría de optimización en funcionales cuadráticos singulares con horizonte de tiempo finito y combinarla con la teoría de los modos deslizantes de alto orden con el propósito de estabilizar las soluciones deseadas del alunizaje de un cohete espacial.

Teniendo en cuenta que el sistema no-lineal que describe el alunizaje del cohete es presentado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g_l + \frac{\mu}{x_3} u \\ \dot{x}_3 &= -u \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

donde x_1 describe la altura sobre la superficie lunar, x_2 la velocidad del cohete y x_3 describe la masa del cohete, además se tiene que las constantes g_l y μ son la gravedad lunar y la velocidad de expulsión respectivamente.

Además se tiene que las condiciones iniciales del cohete están dadas por:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= H \\ x_2(0) &= -V \\ x_3(0) &= M \end{aligned}$$

Con el propósito de controlar cada una de estas variables de estado se comenzará por obtener una representación del sistema no-lineal, a un sistema linealizado alrededor de una trayectoria con parámetros variantes en tiempo, esto con el fin de obtener un *sistema lineal variante en el tiempo*.

Para obtener la linealización alrededor de una trayectoria se define la siguiente diferencia

$$\delta x = x(t) - x^{sol}(t), \quad \delta u = u(t) - u^{sol}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

donde $x^{sol}(t)$ y $u^{sol}(t)$ corresponden a las soluciones que deseamos que $x(t)$ y $u(t)$ se aproximen y una expansión en serie de Taylor alrededor de estas trayectorias puede escribirse como:

$$\dot{\delta x} = \frac{\partial f(x^{sol}(t), u^{sol}(t))}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x^{sol}(t), u^{sol}(t))}{\partial u} \delta u + O(\|\delta x\|^2) + O(\|\delta u\|^2),$$

donde los términos de orden superior se han despreciado dejando la expansión hasta términos cuadráticos, pero con el fin de expresar un sistema totalmente lineal se propone que $O(\|\delta x\|^2) \approx 0$ y $O(\|\delta u\|^2) \approx 0$. De esta forma obtendremos una linealización local de (4.6.1) alrededor de una trayectoria $(x^{sol}(t), u^{sol}(t))$, donde el sistema linealizado corresponde a un *sistema lineal variante en el tiempo* dado por:

$$\dot{\delta x} = \frac{\partial f(x^{sol}(t), u^{sol}(t))}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x^{sol}(t), u^{sol}(t))}{\partial u} \delta u \quad (4.6.2)$$

también (4.6.2) puede representarse como:

$$\dot{\delta x} = A(t)\delta x + B(t)\delta u$$

$$A(t) = \frac{\partial f(x^{sol}(t), u^{sol}(t))}{\partial x}, \quad B(t) = \frac{\partial f(x^{sol}(t), u^{sol}(t))}{\partial u}$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son las matrices jacobianas.

A continuación comencemos por obtener la linealización de (4.6.1) alrededor de una trayectoria $(x^{sol}(t), u^{sol}(t))$ para esto tomemos en cuenta que

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, u) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, u) = -g_l + \frac{\mu}{x_3} u$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, u) = -u$$

donde las trayectorias que deseamos alcanzar están dadas por

$$x^{sol}(t) = (0, 0, M - m_o t)^T$$

$$u^{sol}(t) = \frac{g_l}{\mu} (M - m_o t)$$

donde M es la masa total de combustible del cohete, y m_o es una constante de proporcionalidad que nos indica la tasa con que la masa total M disminuye

por lo tanto las variables de estado del sistema linealizado del cohete estarán dadas por :

$$\delta x_1 = x_1(t)$$

$$\delta x_2 = x_2(t)$$

$$\delta x_3 = x_3(t) - (M - m_o t)$$

y donde la expresión de las matrices jacobianas para el sistema linealizado (4.6.2) están expresadas por:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{(x^{sol}(t), u^{sol}(t))}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial u} \end{pmatrix}_{(x^{sol}(t), u^{sol}(t))}$$

por tanto tendremos que $A(t)$ y $B(t)$ están dadas por

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{gl}{M - m_o t} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{M - m_o t} \\ -1 \end{pmatrix}$$

y el *Sistema Lineal Variante en Tiempo* que se obtiene, está representado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x}_1 \\ \dot{\delta x}_2 \\ \dot{\delta x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{gl}{M - m_o t} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{M - m_o t} \\ -1 \end{pmatrix} \delta u \quad (4.6.3)$$

con condiciones iniciales dadas por $(\delta x_1(0), \delta x_2(0), \delta x_3(0))^T = (H, -V, 0)^T$.

Con el propósito de transformar el sistema lineal variante en el tiempo (4.6.3) a un sistema en la forma canónica de fase variable que este dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta u$$

Se necesita encontrar la transformación $T(t)$ no-singular tal que el nuevo sistema $y(t) = T(t)\delta x$, donde se tiene que la derivada de y está dada por $\dot{y}(t) = (\dot{T} + TA)T^{-1}y + TB(t)\delta u(t)$. Por lo que la transformación $T(t)$ es tal que:

$$(\dot{T} + TA)T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \end{pmatrix}, \quad TB(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $T(t)$ es encontrada siguiendo el procedimiento descrito en [63], de esta manera la transformación $T(t)$ para (4.6.3) está dada por

$$T(t) = \begin{pmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{pmatrix}$$

donde

$$T_1 = (T_{11}, T_{12}, T_{13})$$

$$T_{11} = \frac{(M - m_o t)(\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)}{g_l(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)}$$

$$T_{12} = \frac{\mu(M - m_o t)^2}{g_l(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)}$$

$$T_{13} = \frac{\mu^2(M - m_o t)}{g_l(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)}$$

$$T_2 = (T_{21}, T_{22}, T_{23})$$

$$T_{21} = -\frac{m_o(M^2 g_l - 2M g_l^2 m_o t - 4M g_l \mu m_o + g_l^2 m_o^2 t^2 + 4g_l \mu m_o^2 t + 2\mu^2 m_o^2)}{g_l(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)^2}$$

$$T_{22} = \frac{(M - m_o t)(M^2 g_l^2 - 2M g_l^2 m_o t - 2M g_l \mu m_o + g_l^2 m_o^2 t^2 + 2g_l \mu m_o^2 t - 2\mu^2 m_o^2)}{g_l(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)^2}$$

$$T_{23} = \frac{\mu(M^2 g_l^2 - 2M g_l^2 m_o t - 2M g_l \mu m_o + g_l^2 m_o^2 t^2 + 2g_l \mu m_o^2 t - 2\mu^2 m_o^2)}{g_l(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)^2}$$

$$T_3 = (T_{31}, T_{32}, T_{33})$$

$$T_{31} = -\frac{4\mu^2 m_o^4}{g_l(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)^3}$$

$$T_{32} = \frac{2m_o(M - m_o t)(M^2 g_l^2 - 2\mu g_l^2 m_o t - 6M g_l \mu m_o + g_l^2 m_o^2 t^2 + 6g_l \mu m_o^2 t + 10\mu^2 m_o^2)}{g_l(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)^3}$$

$$T_{33} = \frac{(M^3 g_l^2 - 3M^2 g_l^2 m_o t - 4M^2 g_l^2 \mu m_o + 3M g_l^3 m_o^2 t^2 + 8M g_l^2 \mu m_o^2 t - g_l^3 m_o^3 t^3 - 4g_l^2 \mu m_o^3 t^2 + 12\mu^3 m_o^3)}{g_l(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)^3}$$

Ahora con esta matriz de transformación $T(t)$ encontramos que $A_c(t) = (\dot{T} + TA)T^{-1}$ y $B_c = TB$ están dados por

$$A_c(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\beta_1(t) = -\frac{4m_o^3 \left(-M^3 g_l^3 + 3M^2 g_l^3 m_o t + 9M^2 g_l^2 \mu m_o - 3M g_l^3 m_o^2 t^2 - 18M g_l^2 \mu m_o^2 t - 18M g_l \mu^2 m_o^2 + g_l^3 m_o^3 t^3 + 9g_l^2 \mu m_o^3 t^2 + 18g_l \mu^2 m_o^3 t + 12\mu^3 m_o^3 \right)}{(M - m_o t)^3 (2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)^3}$$

$$\beta_2(t) = -\frac{4m_o^2(M^2 g_l^2 - 2M g_l^2 m_o t - 6M g_l \mu m_o + g_l^2 m_o^2 t^2 + 6g_l \mu m_o^2 t + 6\mu^2 m_o^2)}{(M - m_o t)^2 (2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)^2}$$

$$\beta_3(t) = -\frac{2m_o(3\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)}{(M - m_o t)(2\mu m_o - M g_l + g_l m_o t)}$$

también observemos que el sistema (4.6.3) tiene asociado un funcional de costo dado por

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} (\delta x(t))^T Q(t) \delta x(t) dt \quad (4.6.4)$$

y con la transformación $T(t)$ se tendrá que el funcional de costo (4.6.4) será transformado y tomará la forma

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} y^T \tilde{Q}(t) y dt \quad (4.6.5)$$

donde $\tilde{Q}(t) = (T^{-1})^T Q(t) T^{-1}$, y la estructura que se considerará para $\tilde{Q}(t)$ es la que está representada en (4.5.10), dicho esto se propone que:

$$\tilde{Q}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.6)$$

donde claramente la matriz simétrica $Q(t)$ semidefinida positiva existe, debido a que $\tilde{Q}(t)$ es diagonal con valores propios positivos e iguales a los presentes en la diagonal principal, además de que la matriz de transformación $T(t)$ es no singular. Como comentario se tuvo que al calcular $Q(t)$ en la computadora la matriz $Q(t)$ tiene términos demasiado extensos que no fue posible escribirla.

A continuación con la propuesta de $\tilde{Q}(t)$ dada en (4.6.6) el funcional transformado toma la forma:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} (3y_1^2 + y_2^2) dt$$

el cual está sujeta a las dinámicas

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_2 y_1 + B_2 y_2 \\ A_2 &= 0, B_2 = 1 \end{aligned}$$

donde el control virtual óptimo está dado por:

$$y_2 = -P_2 y_1 \quad (4.6.7)$$

donde P_2 es solución de la ecuación diferencial de Riccati dada por

$$\dot{P}_2 = P_2^2 - 3$$

con $P_2(t_f) = 0$. donde se tomará que $t_f = 18$, donde la solución de la ecuación diferencial de Riccati se resolverá por métodos numéricos de ecuaciones diferenciales.

A continuación tomando en cuenta el control virtual óptimo dado en (4.6.7) se procede a diseñar la superficie deslizante, así como su derivada. Por tanto tenemos:

$$S_2 = y_2 + P_2 y_1$$

$$\dot{S}_2 = y_3 + (P_2^2 - 3)y_1 + P_2 y_2$$

Diseñando una superficie auxiliar dada por

$$\Sigma_2 = S_2(t) - \mu_2(t).$$

y teniendo en cuenta que el orden del modo deslizante es dos , el polinomio (4.3.23) toma la forma:

$$\mu_2(t) = (t - t_1)^2 (c_0 + c_1(t - t_0))$$

donde $t_0 = 0$, es el tiempo inicial de las variables de estado. Por lo que tendremos:

$$\mu_2(t) = (t - t_1)^2 (c_0 + c_1 t) .$$

Entonces los coeficientes de polinomio $\mu_2(t)$ están dados por:

$$c_0 = S_2(0) / t_1^2$$

$$c_1 = \dot{S}_2(0) / t_1^2 + 2c_0 / t_1$$

ahora considerando que con la condición inicial $t_0 = 0$ y para un valor propuesto λ , tenemos que el tiempo de alcance está dado por :

$$t_1 = T_2 \left(S_2(0), \dot{S}_2(0) \right)$$

$$T_2 = \lambda \left(|S_2(0)|^3 + \left| \dot{S}_2(0) \right|^6 \right)^{1/6}$$

Además tenemos que la condición inicial del sistema linealizado está dado por $\delta x_1(0) = M = 3000$, $\delta x_2(0) = -V = -4$, $\delta x_3(0) = 0$ con $P_2(18) = 0$, y $k_{11} = 100$; $k_{12} = 100$, $S_2(0) = 1.870e + 05$, $\dot{S}_2(0) = -2.1844e + 04$, también se encuentra que $c_0 = 3.8163e + 05$, $c_1 = 664.5720$ y tomando $\lambda = 3.2045e - 04$; obtenemos $t_1 = T_2 = 7$. Además tenemos que $m_o = 107.1429$, y finalmente debido a que el orden del modo deslizante es dos se implementará el control quasicontinuo de segundo orden dado por

$$u = -\Phi_1(y) \frac{\left[\dot{\Sigma}_2 + |\Sigma_2|^{1/2} \text{Sign}(\Sigma_2) \right]}{\left[\left| \dot{\Sigma}_2 \right| + |\Sigma_2|^{1/2} \right]}$$

con una ganancia variable dada por:

$$\Phi_1(y) = 100 \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} + 100$$

A continuación, de acuerdo a lo anterior mostramos los resultados simulación correspondientes a la controlabilidad del descenso de un cohete espacial sobre la superficie lunar

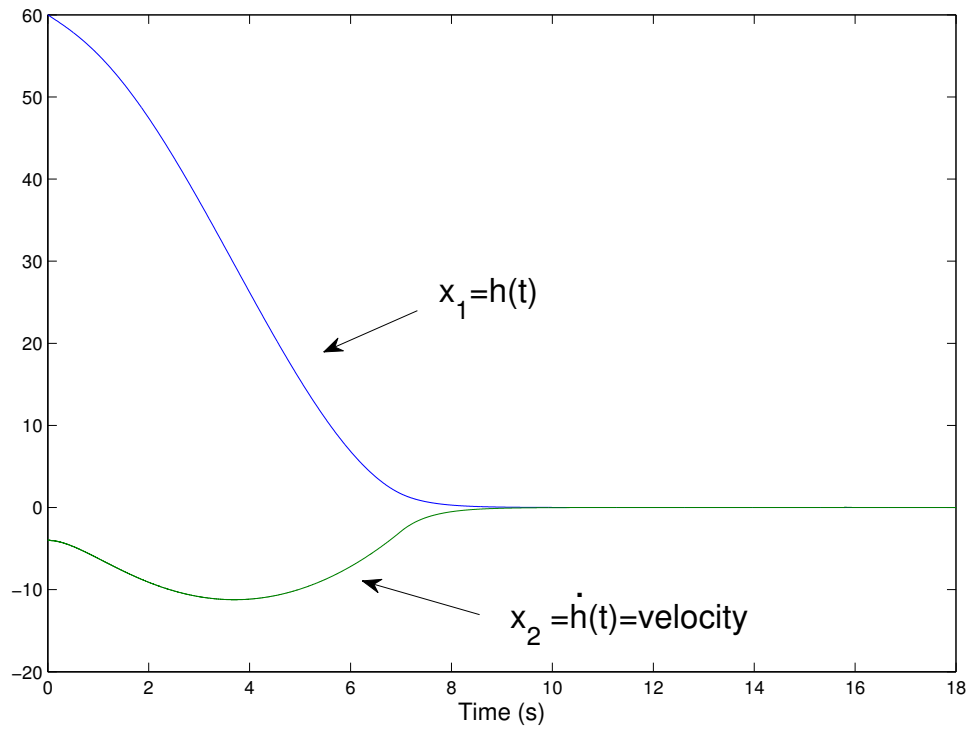


Figura 4.6.1: altura y velocidad de cohete

En figura (4.6.1) se muestra el descenso x_1 y la velocidad x_2 de un cohete que se encuentra alunizando, donde observemos que inicialmente el cohete se encuentra a una altura inicial $x_1(0) = 60\text{mts}$ sobre el suelo lunar, y a una velocidad inicial $x_2(0) = -4\text{mts/s}$ indicativo de que el cohete está en descenso. Finalmente observemos que el cohete aluniza alcanzando una altura de cero respecto al suelo, y también como es de esperarse su velocidad final es cero., alcanzando así su reposo.

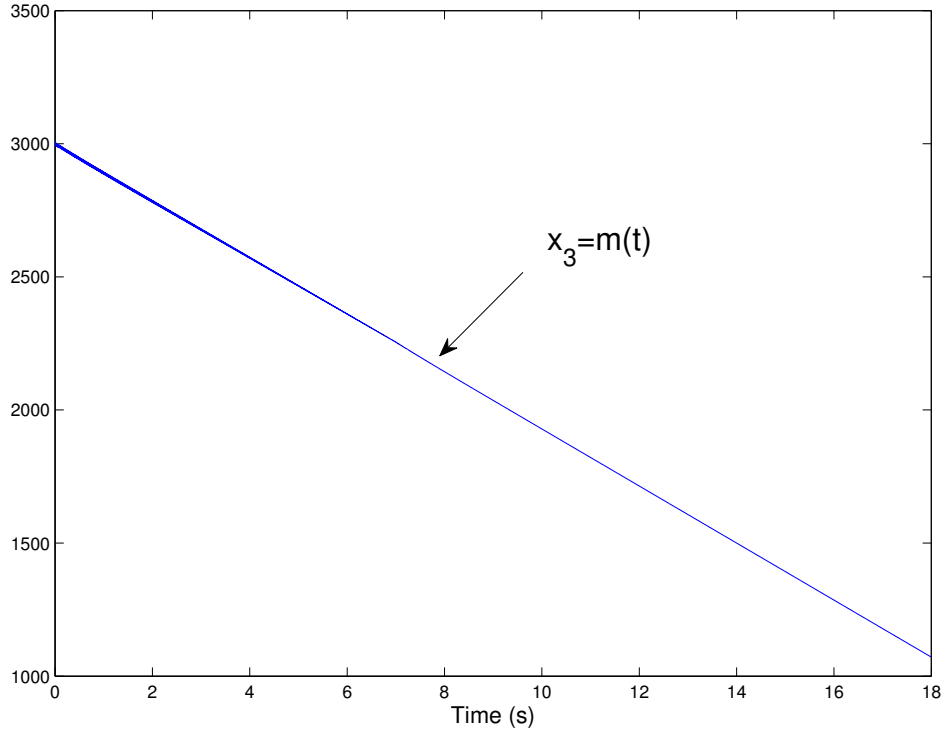


Figura 4.6.2: disminución de la masa en forma lineal

En figura (4.6.2) se muestra el consumo del combustible del cohete, donde se observa que la quema o disminución de combustible $m(t)$ decae de forma lineal.

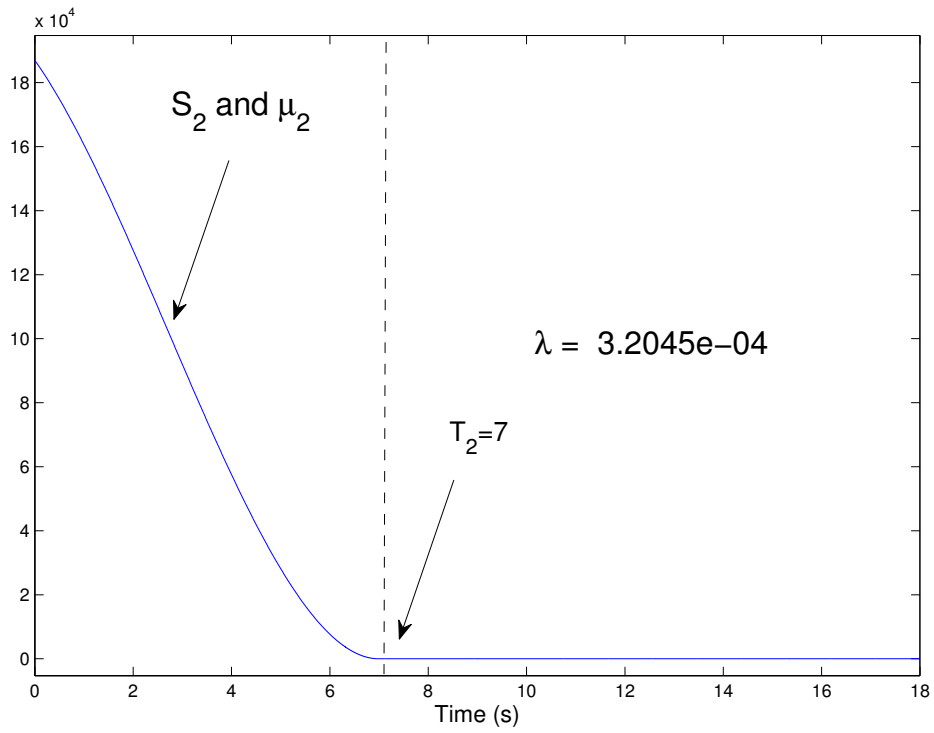


Figura 4.6.3: tiempo de convergencia de S_2

En figura (4.6.3) observamos que la superficie deslizante S_2 y μ_2 convergen a cero en un tiempo $t_1 = T_2 = 7$ seg.

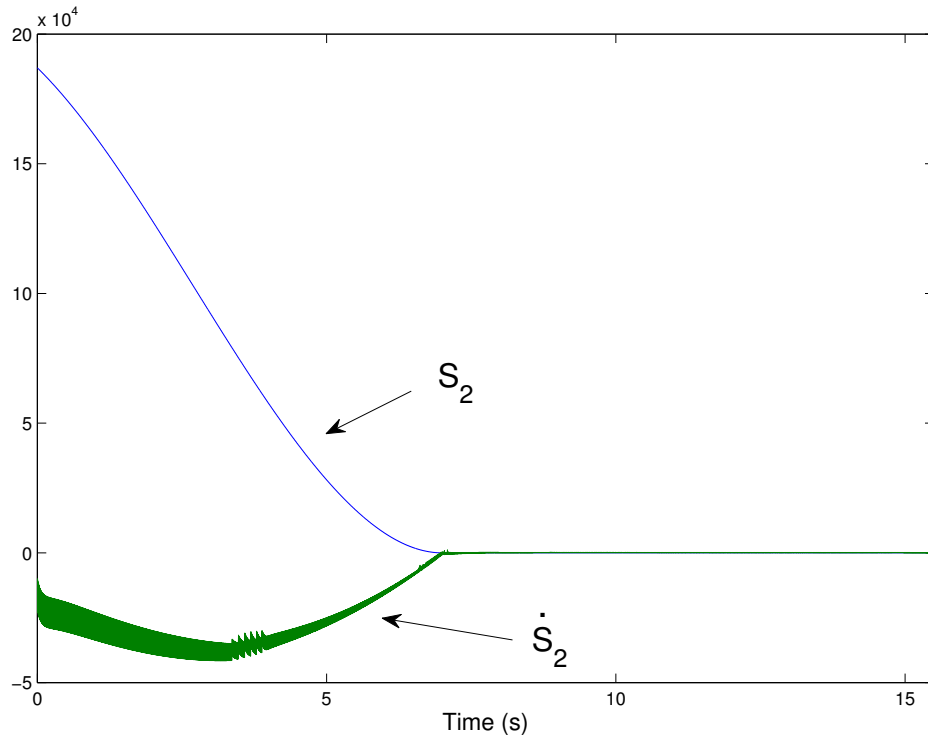


Figura 4.6.4: S_2 y \dot{S}_2

En figura (4.6.4) se observa que la superficie deslizante S_2 y su derivada \dot{S}_2 convergen a cero en un tiempo de $t_1 = T_2 = 7$ seg.

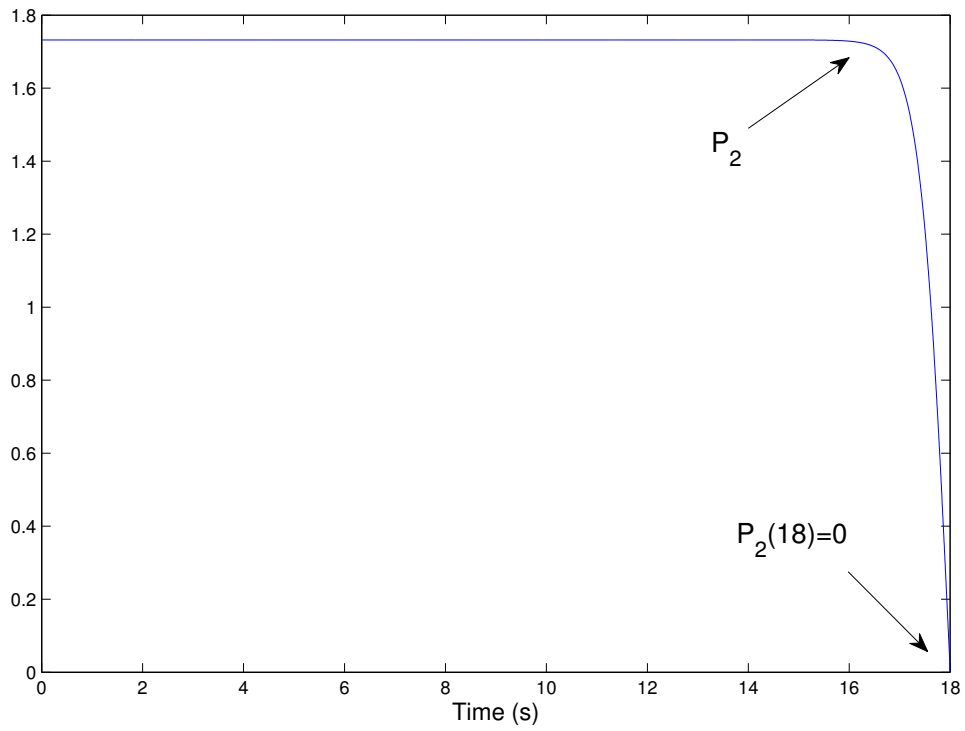


Figura 4.6.5: Solución de Riccati P_2

En la figura (4.6.5) se observa la solución de la ecuación diferencial de Riccati $P_2(t)$ con la condición de frontera $P_2(18) = 0$.

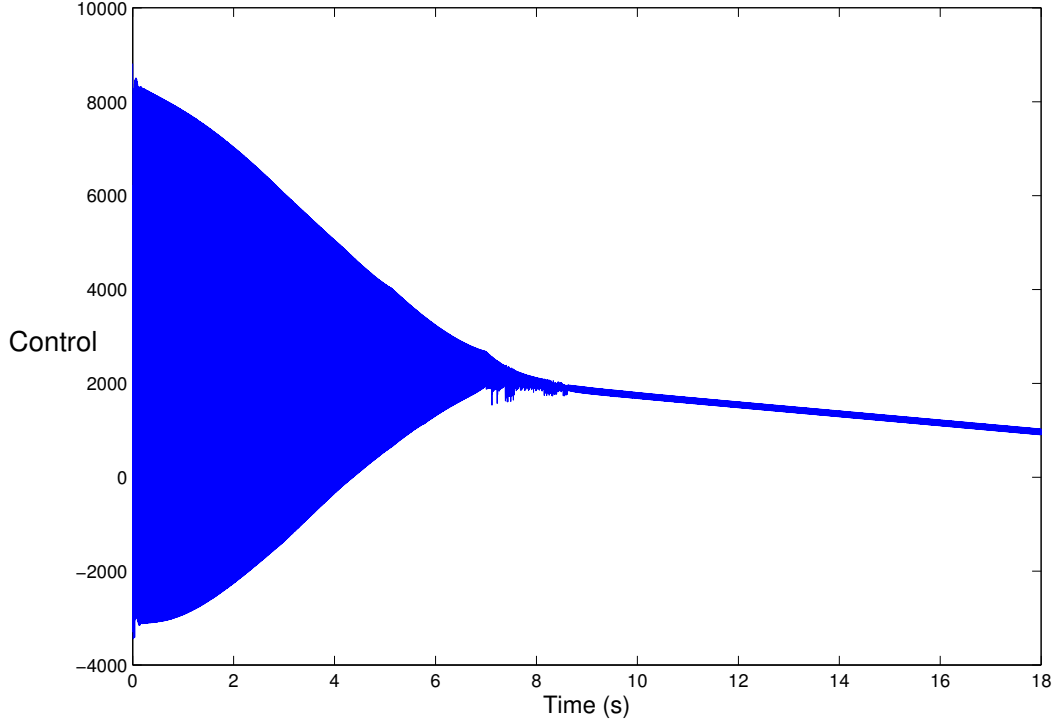


Figura 4.6.6: Control Quasicontinuo de segundo orden

En figura (4.6.6) tenemos el control u que representa la rapidez con que se va quemando el combustible. Y se tiene entonces que el funcional de costo transformado puede ahora escribirse como:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1=7}^{t_f=18} (3y_1 + y_2) dt$$

.

4.7. CONCLUSIÓN

Este capítulo muestra la conexión natural entre el orden de singularidad del problema lineal cuadrático singular y el orden de los modos deslizantes. La Variedad Deslizante Óptima Variante en el Tiempo es considerada como la variedad deslizante para el MDAO del orden correspondiente.

El algoritmo para encontrar la Variedad Deslizante de Alto Orden Variante en Tiempo es sugerido para asegurar:

- que las trayectorias solución del sistema lleguen a la Variedad Deslizante Óptima de Alto Orden Variante en Tiempo
- que para todo $t_1 \leq t$ las trayectorias solución del sistema se mantengan en la Variedad Deslizante Óptima de Alto Orden Variante en Tiempo
- la insensibilidad de las trayectorias solución del sistema con respecto a incertidumbres acopladas y acotadas.

Capítulo 5

UN ALGORITMO DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN PARA ESTABILIZAR EL VEHÍCULO CUADRICÓPTERO CON VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

5.1. RESUMEN

En este capítulo una técnica de Control por Modos Deslizantes de Alto Orden es presentada para estabilizar el vehículo cuadricóptero. Las ecuaciones no lineales son simplificadas para desarrollar los algoritmos de control. El sistema de lazo cerrado que utiliza esta metodología del modo deslizante es robusto incluso en presencia de perturbaciones desconocidas e incertidumbres paramétricas en el modelo. El esquema de control se validado en simulación y algunos experimentos son desarrollados para demostrar la viabilidad experimental de la estrategia de control. Simulación y resultado experimental demuestra la buena ejecución de los algoritmos propuestos.

5.2. INTRODUCCIÓN

El uso de vehículos aéreos no tripulados para operaciones de vigilancia y combate es probable que aumente rápidamente en los próximos 10 a 20 años ya que los requisitos de desempeño de los aviones militares van más allá de las capacidades de los pilotos humanos y los costos de los vuelos tripulados se vuelven prohibitivos. Los vehículos aéreos no tripulados ayudan a eliminar estos cuellos de botella permitiendo que el piloto permanezca en el suelo (o en otra aeronave), controlando el vehículo aéreo no tripulado remotamente. Este enfoque representa un enorme desafío a la teoría de control, ya que muchas de las funciones de los pilotos ahora tendrán que ser asumidas por los sistemas de control. La nueva generación de vehículos aéreos no tripulados probablemente sufrirán cambios de configuración y de misión frecuentes. se requerirá la capacidad de diseñar rápidamente, rediseñar e implementar las leyes de control de bucle interno. Sin embargo, la mayoría de las técnicas actuales de diseño, especialmente para los sistemas no lineales, no están para estas tareas. Por lo tanto, los investigadores deben desarrollar herramientas automatizadas de diseño para facilitar el uso de recientes y nuevas técnicas de diseño de control.

En las operaciones prácticas, los Vehículos no tripulados de ala fija han sido ampliamente utilizados durante años en misiones de vigilancia. El despegue vertical y la capacidad de vuelo estacionario de aterrizaje (VTOL) especialmente en estos vehículos se hace posible una gran cantidad de aplicaciones en las que el vehículo no tripulado tiene a menudo que ser capaz de mantener los vuelos cuasi-estacionarias. Dentro de la familia de los VTOL UAVs, el vehículo cuadricóptero es uno de los más populares, principalmente debido a su gran maneobrabilidad y capacidad de fuego en condiciones de combate para alcanzar las misiones especificadas

En este trabajo, estamos interesados en proponer algoritmos de control no lineales usando la metodología de los Modos Deslizantes para estabilizar el vehículo cuadricóptero. La idea principal del CMD está basada en la adecuada construcción de una función llamada variable deslizante o superficie deslizante, tan rápido como la variable deslizante es igual a cero, las soluciones del sistema tomarán soluciones estables, si y sólo si el diseño de la superficie deslizante fue la adecuada, y además es posible hacer que esta superficie deslizante converja a cero mediante un control de alta frecuencia de conmutación. La idea del CMD es mantener las soluciones del sistema sobre la variedad deslizante, cuando esta es igual a cero y mantenerlas de ahí en adelante, esto mediante el CMD Utkin [73]. Dentro de las técnicas de los modos deslizantes, es bien conocido que los modos deslizantes de alto orden (MDAO) es una poderosa técnica, que puede ser usada para sistemas con grado relativo mayor a 1: Levant [44], [48] y Levant [45]. Además estas superficies de alto orden nos conducen a la implementación de controladores de alto orden, que como puede verse en Levant [45] son robustos en sistemas que están perturbados por disturbios e incertidumbres acopladas.

Una variedad exitosa de aplicaciones de control está basada en el tradicional (Grado relativo 1), así como los algoritmos de los modos deslizantes de alto orden que han sido reportados a través de la literatura, estas aplicaciones van desde la dirección guiada de un misil, en vehículos acuáticos, robots manipuladores para grúa puente, véase por ejemplo [58]-Bartolini and Pisano [6]. Como podemos ver en estas publicaciones el enfoque del modo deslizante proporciona diferentes técnicas para permitir el diseño de control basado en la salida Freguela et al. [22] y [3], diferenciadores [47], observadores, rechazo de perturbaciones y la estimación, etc A pesar de la gran cantidad de referencias utilizando las técnicas de los modos deslizantes que se pueden encontrar en la literatura, sólo unos pocos han sido probados en los vehículos aéreos no tripulados en tiempo real. En este trabajo, principalmente se estudia y controla la dinámica lateral y longitudinal de este vehículo..

El índice de esta parte del trabajo de tesis consiste en lo siguiente: en sección 5.3 se presentan las ecuaciones no lineales que representan la dinámica del vehículo aéreo. La sección 5.4 está dedicada a desarrollar la estrategia de control y a dar los argumentos de su convergencia. Los principales resultados de simulación son introducidos en la sección 5.5 y algunas gráficas que representan los resultados experimentales se muestran en sección 5.6. Finalmente, la discusión sobre este trabajo y perspectivas son descritas en sección 5.7.

5.3. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

El cuadricóptero es un vehículo aéreo bien conocido que tiene cuatro rotores. es un sistema mecánico sobre actuado donde este tiene cuatro entradas y seis grados de libertad, ver figura (5.3.1). Los motores delanteros y traseros giran hacia la izquierda, mientras que los otros dos motores giran hacia la derecha, por lo que los efectos giroscópicos y momentos aerodinámicos tienden a cancelarse en cada motor, donde M_k , produce una fuerza igual a, f_k , y un torque τ_k . y a el par del motor se le opone una resistencia aerodinámica.

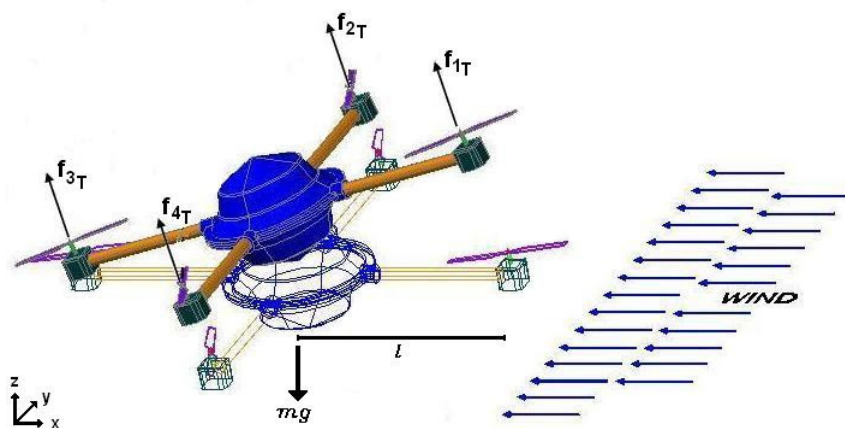


Figura 5.3.1: EL vuelo del vehículo cuadricóptero.

Las ecuaciones matemáticas simplificadas del vehículo cuadricóptero asumiendo ángulos pequeños y perturbados por viento externo pueden ser escritas como

$$\ddot{x} = -u \sin(\theta) + w_1 \quad (5.3.1a)$$

$$\ddot{y} = u \cos(\theta) \sin(\phi) + w_2 \quad (5.3.1b)$$

$$\ddot{z} = u \cos(\theta) \cos(\phi) - g + w_3 \quad (5.3.1c)$$

$$\ddot{\theta} = \tau_\theta + w_4 \quad (5.3.1d)$$

$$\ddot{\phi} = \tau_\phi + w_5 \quad (5.3.1e)$$

$$\ddot{\psi} = \tau_\psi + w_6 \quad (5.3.1f)$$

donde x, y , y z denotan la posición del helicóptero, ψ, θ , y ϕ son los ángulos yaw, pitch y roll respectivamente, la masa (m) y la matriz constante de inercia son normalizadas por propósitos de control, g introduce la aceleración gravitacional, $u = \sum f_k$, $\tau_\phi = (f_2 - f_4)l$, $\tau_\theta = (f_3 - f_1)l$, $\tau_\psi = \sum \tau_k$ son las entradas de control, l es la distancia entre los rotores y el centro de masa del vehículo y w_k es el disturbio debido al viento. Para este trabajo consideramos que $w_k, \forall k : 1 : 6$ está acotado y no crece indefinidamente.

Este estudio se enfoca principalmente sobre el control de la dinámica lateral y longitudinal del vehículo aéreo. De esta manera el control para estabilizar la altitud del vehículo (5.3.1c) será simple y propuesto de la siguiente manera

$$u = \frac{(-\text{sat}_a(k_a \dot{z}) - \text{sat}_b(k_b(z - z_d)) + g)}{\cos(\theta) \cos(\phi)} \quad (5.3.2)$$

donde sat_i define la función de saturación, k_i es una ganancia constante y positiva z_d es la altitud deseada. esto ha sido probado en Munoz et al. [55] que el anterior control estabiliza (5.3.1c) incluso en presencia de perturbaciones externas, entonces esto implica que $\dot{z} \rightarrow 0$ y $z \rightarrow z_d$.

Introduciendo el controlador previo en (5.3.1) y linealizando el sistema resultante, este podría ser reescrito como

$$x^{IV} \approx -\tau_\theta + w_a \quad (5.3.3a)$$

$$y^{IV} \approx \tau_\phi + w_b \quad (5.3.3b)$$

$$\ddot{\psi} = \tau_\psi + w_6 \quad (5.3.3c)$$

donde w_a y w_b son las perturbaciones externas y las incertidumbres en el modelo, para la dinámica lateral y longitudinal.

5.4. ESQUEMA DEL CONTROL

Observemos que en la sección previa la dinámica del ángulo yaw está desacoplada del resto de las ecuaciones. Así, un controlador para la ecuación (5.3.3c) será propuesta de la siguiente forma:

Control para el ángulo Yaw

La ecuación en (5.3.3c) puede reescribirse como

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.4.4)$$

$$\dot{x}_2 = \tau_\psi + w_6 \quad (5.4.5)$$

donde $\mathbf{x} = [x_1 = \psi \quad x_2 = \dot{\psi}]^T$. Además, w_6 necesita satisfacer

$$|w_6(t, x)| \leq L, \quad L > 0. \quad (5.4.6)$$

la cual representa dinámicas no modeladas así como perturbaciones desconocidas pero acotadas .

El objetivo de control es llevar las variables de estado a un conjunto de puntos, esto es $x_1 \rightarrow d_1$ y $x_2 \rightarrow d_2$. Entonces, se definen las siguientes señales de error

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 \end{pmatrix} \quad (5.4.7)$$

Para simplificar aún más el análisis $d_2 = 0$ y considerando d_1 ser un valor constate. Tomando así la derivada del error (5.4.7) con respecto al tiempo tenemos

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \tau_\psi + w_6 \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} e_1(0) &= x_1(0) - d_1(0) \\ e_2(0) &= x_2(0) \end{aligned}$$

Para ilustración y propósitos de simulación consideremos la señal perturbada como $w_6 = \delta \sin(\gamma t)$. Ahora definase la siguiente superficie deslizante dada por

$$\sigma = \dot{e}_1 + ce_1 \quad (5.4.8)$$

tomando la derivada temporal tenemos

$$\dot{\sigma} = \tau_\psi + w_6 + ce_2 \quad (5.4.9)$$

Notemos que la señal de control aparece en la primer derivada temporal, de esto puede sugerirse la implementación del controlador Súper Twisting el cual puede ser aplicado para alcanzar $\sigma = 0$. Usando esta metodología para que la superficie converja a cero en tiempo finito. Entonces, el control súper twisting toma la forma

$$\tau_\psi = -\kappa|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) - ce_2 - f; \quad \kappa > 0 \quad (5.4.10)$$

$$\dot{f} = \text{asign}(\sigma) \quad (5.4.11)$$

entonces

$$\dot{\sigma} + \kappa|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) + f = w_6 \quad (5.4.12)$$

$$\dot{f} = \text{asign}(\sigma) \quad (5.4.13)$$

donde κ es una ganancia constante. El término f es igual a w_6 en tiempo finito. Por tanto la dinámica que gobierna estará dada por

$$\dot{\sigma} = -\kappa|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma)$$

integrando la ecuación anterior obtenemos

$$|\sigma|^{1/2} = -\frac{\kappa}{2}t + |\sigma_0|^{1/2}$$

Por tanto, el tiempo en el cual $\sigma = 0$ es $t_{co} = \frac{\kappa}{2}|\sigma_0|^{1/2}$.

Estabilización para las dinámicas $y - \phi$

Notemos que las dinámicas laterales y longitudinales tienen una estructura similar (5.3.3a) y (5.3.3b). Este hecho es normal debido a la configuración del cuadricóptero. Presentamos en los siguientes pasos el procedimiento para estabilizar la dinámica lateral, el mismo procedimiento puede ser usado para estabilizar la dinámica longitudinal.

Recuerdese que la dinámica lateral está representada como:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &\approx \phi \\ \ddot{\phi} &= \tau_\phi + w_b\end{aligned}$$

y puede ser escrita como

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (5.4.14a)$$

$$\dot{y}_2 = y_3 \quad (5.4.14b)$$

$$\dot{y}_3 = y_4 \quad (5.4.14c)$$

$$\dot{y}_4 = \tau_\phi + w_b \quad (5.4.14d)$$

Similarmente w_b es una perturbación acotada que satisface (5.4.6). El objetivo es que el vehículo aéreo vaya a la coordenada y deseada. Para esto, el conjunto de puntos deseados para la variables roll, $y_1 = d_1$ para el desplazamiento, para la velocidad deseada $d_2 = 0$, para la velocidad angular y posición los valores deseados: $d_3 = 0$, y $d_4 = 0$ respectivamente. Así las ecuaciones de error están dadas por

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - d_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (5.4.15)$$

basados en (5.4.14), las dinámicas del error están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2; \\ \dot{e}_2 &= e_3; \\ \dot{e}_3 &= e_4; \\ \dot{e}_4 &= \tau_\phi + w_b\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}e_1(0) &= y_1(0) - d_1(0) \\ e_2(0) &= y_2(0) \\ e_3(0) &= y_3(0) \\ e_4(0) &= y_4(0)\end{aligned}$$

Para poder diseñar un modo deslizante de alto orden para asegurar que las dinámicas del error vayan a cero, esto es para asegurar que las dinámicas del error sean asintóticamente estables, consideramos el siguiente problema de optimización lineal cuadrática

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} (qe_1^2 + re_2^2) dt \quad (5.4.16)$$

sujeta a la ecuación dinámica

$$\dot{e}_1 = e_2;$$

donde q y r son dos parámetros de peso. Tomando la señal e_2 como una variable de control virtual, obtenemos un problema estándar de optimización lineal cuadrática. Por lo tanto el control virtual óptimo que minimiza (5.4.16), es dado por

$$e_2 = -r^{-1}pe_1 \quad (5.4.17)$$

donde p es la solución de la siguiente ecuación algebraica de Riccati

$$q - r^{-1}p^2 = 0 \quad (5.4.18)$$

Ahora definiendo la siguiente superficie deslizante

$$\sigma = \dot{e}_1 + ce_1 \quad (5.4.19)$$

con $c := r^{-1}p$. Observe que cuando la superficie deslizante σ sea cero en un tiempo t_1 (5.4.19) la funcional de costo (5.4.16), encontrará su mínimo para todo $t \geq t_1$, entonces por definición esto definirá dinámicas estables del error.

El siguiente paso es diseñar un algoritmo de control para llevar las variables del error a la superficie óptima y posteriormente mantenerla ahí. El grado relativo de la superficie deslizante con respecto a la variable de control es 3. Por lo tanto un control por modos deslizantes de alto orden es requerido. Y en particular debido al grado relativo 3, consideramos un control quasicontinuo de tercer orden.

$$\tau_\phi = -\Phi_3 \frac{\left[\ddot{\sigma} + 2 \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \right)^{-1/2} \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \text{sign}(\sigma) \right) \right]}{\left[\left| \ddot{\sigma} \right| + 2 \left(\left| \dot{\sigma} \right| + |\sigma|^{2/3} \right)^{1/2} \right]} \quad (5.4.20)$$

con Φ_3 siendo una constante y siendo seleccionada de acuerdo a [50]. Este algoritmo de control garantiza que $t \rightarrow \infty$, $\ddot{\sigma}, \dot{\sigma}, \sigma \rightarrow 0$ en tiempo finito.

5.5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Para validar la ejecución de los algoritmos de control varias simulaciones fueron llevadas a cabo, las siguientes gráficas fueron escogidas y representan los resultados principales. El control para la altitud se ha estudiado mucho, y por tal razón en esta sección solo los resultados para el ángulo yaw y dinámicas laterales son introducidas.

El controlador (5.4.10) que está conformado con (5.4.11) es usado para estabilizar el ángulo yaw, donde los parámetros escogidos para la simulación fueron escogidos como:

$$\begin{aligned} d_1 &= 4, & d_2 &= 0; \\ c &= 4; & a &= 1 \quad \kappa = 7; \\ w_6 &= \sin(2t) \end{aligned}$$

En la Figura 5.5.1 se muestran las respuestas de los estados $(\psi, \dot{\psi})$, donde aplicando el algoritmo de control súper twisting tendremos que tanto la posición angular como la velocidad convergen a los valores deseados asintóticamente, esto debido al diseño de la superficie deslizante σ .

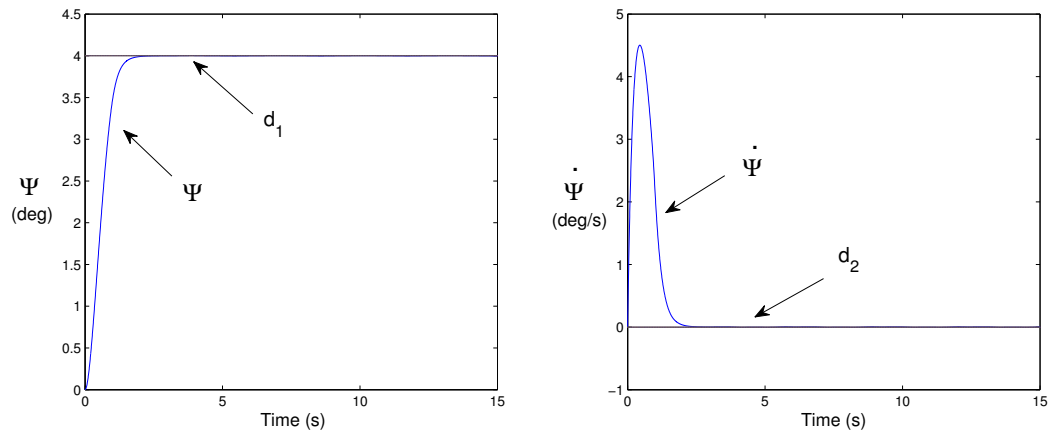


Figura 5.5.1: respuestas de posición $x_1 = \psi$ y velocidad $x_2 = \dot{\psi}$.

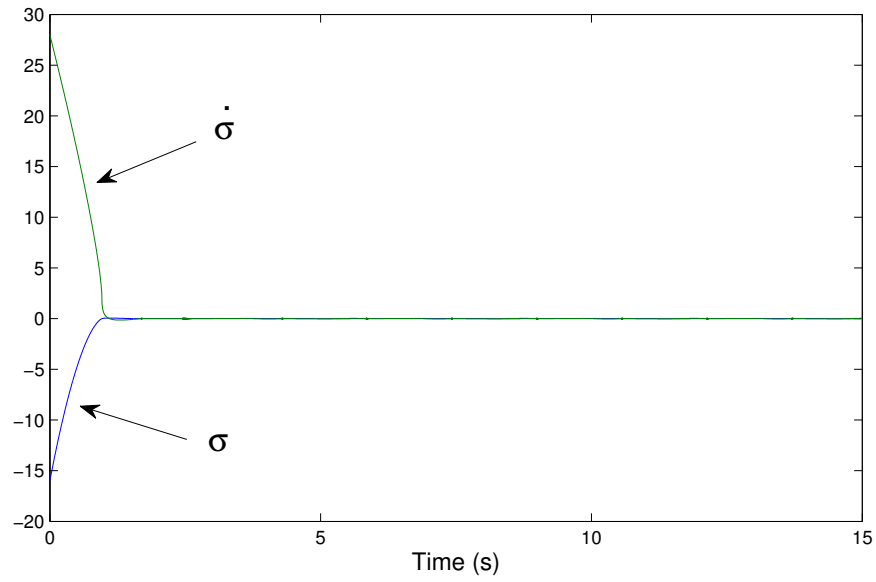


Figura 5.5.2: superficies deslizantes

Por otro lado, en la figura (5.5.2) podemos observar la convergencia de las superficies deslizantes a cero en tiempo finito, esto significa que los errores van a la superficie deslizante $\sigma = 0$ y son mantenidas ahí.

En figura (5.5.3) se muestra la respuesta de control.

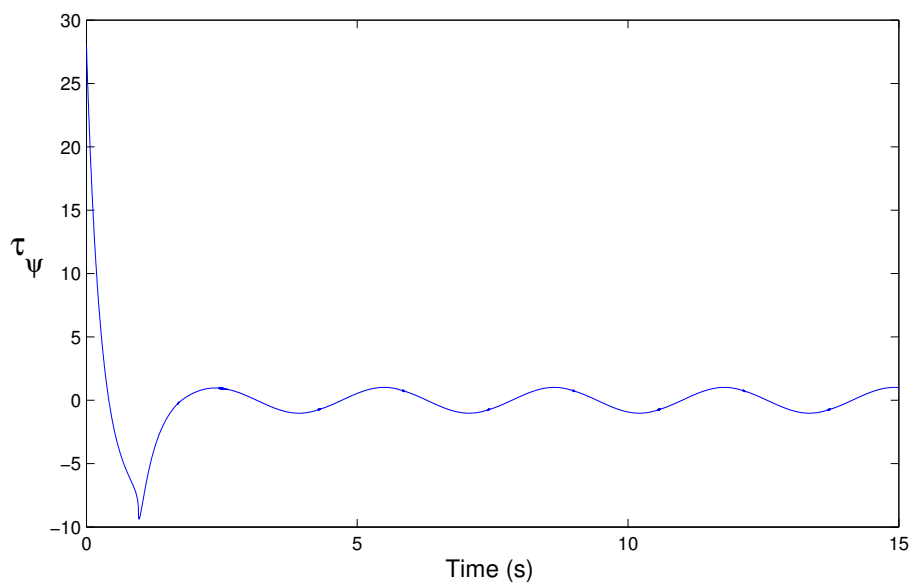


Figura 5.5.3: τ_ψ respuesta de entrada de control.

La dinámica lateral (similarmente la dinámica longitudinal) pueden ser estabilizadas usando (5.4.20). estas dinámicas son importantes porque definen el desplazamiento del vehículo aéreo sobre el plano horizontal y al mismo tiempo los ángulos que son responsables de que el cuadricóptero permanezca en vuelo. Para obtener los parámetros usados en el algoritmo de control primero la ecuación de Riccati (5.4.18) necesita resolverse. Así, usando $r = 2$ y $q = 72$ en (5.4.16) la solución de (5.4.18) es $p = 12$ por lo tanto la ganancia para la superficie deslizante es $c = 6$. El resultado de simulación para las dinámicas laterales están representadas en las siguientes gráficas. Las condiciones iniciales fueron $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 2$ y $y_4(0) = 0.5$, y $d_1 = 4$ como una referencia deseada, y por propósito de simulación, la perturbación es tomada como $w_b = \sin(2t)$.

En las figura (5.5.4) las respuestas de los errores cuando se usa el controlador (5.4.20) son presentadas. Notemos en esta figura que todos los errores convergen a cero. Lo cual implica también que las superficies deslizantes también convergen a cero.

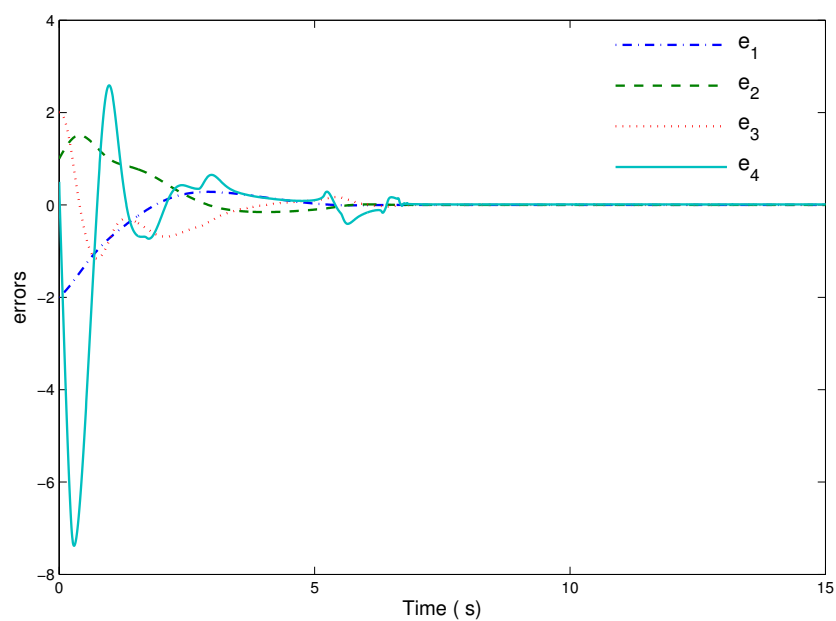


Figura 5.5.4: Respuesta de los errores

En figura (5.5.5), se representan las respuestas de los estados $(y, \dot{y}, \phi, \dot{\phi})$. Notemos también que en esta figura la velocidad de traslación \dot{y} , la velocidad angular $\dot{\phi}$ y el ángulo roll ϕ van a cero, y similarmente la posición en el eje y converge a la posición deseada $d_1 = 4$. Recuerde que aunque el control se obtuvo para un sistema lineal, el controlador es robusto con respecto a perturbaciones desconocidas e incertidumbres en el modelo w_b . En figura (5.5.6) se presenta la entrada del esfuerzo de control, donde en esta figura puede apreciarse que cuando las superficies deslizantes están convergiendo a cero las oscilaciones en el esfuerzo de control son apreciables, esta es una característica clásica de este tipo de controladores (cuando se usa la técnica de los modos deslizantes). Sin embargo, esta característica puede ser reducida añadiendo funciones de saturación o alguna otra técnica bien conocida de la literatura. Por otra parte, a partir de nuestra experiencia práctica este parpadeo o chattering es presentado en las simulaciones, pero no es visible o significativo en el sistema de pruebas de vuelo.

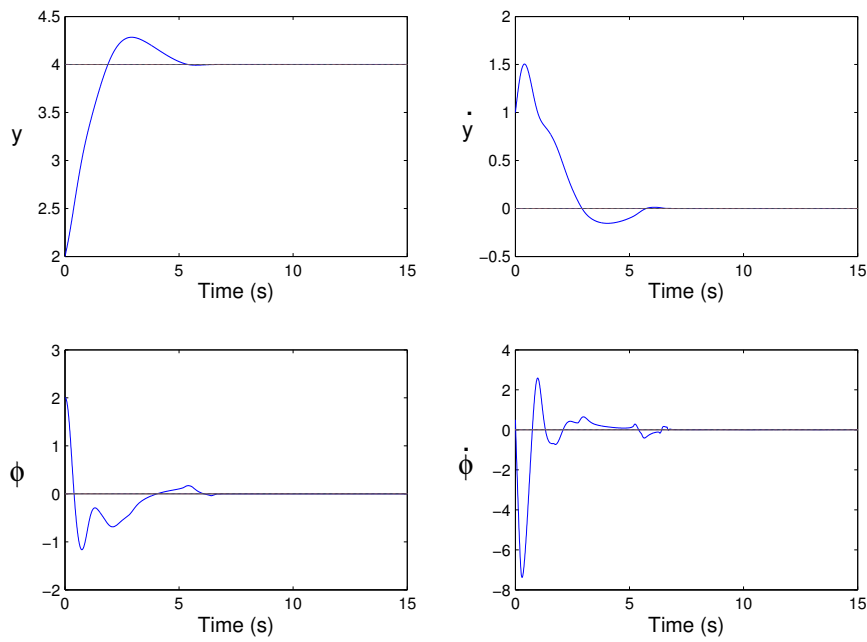


Figura 5.5.5: Respuesta de los estados en las dinámicas laterales

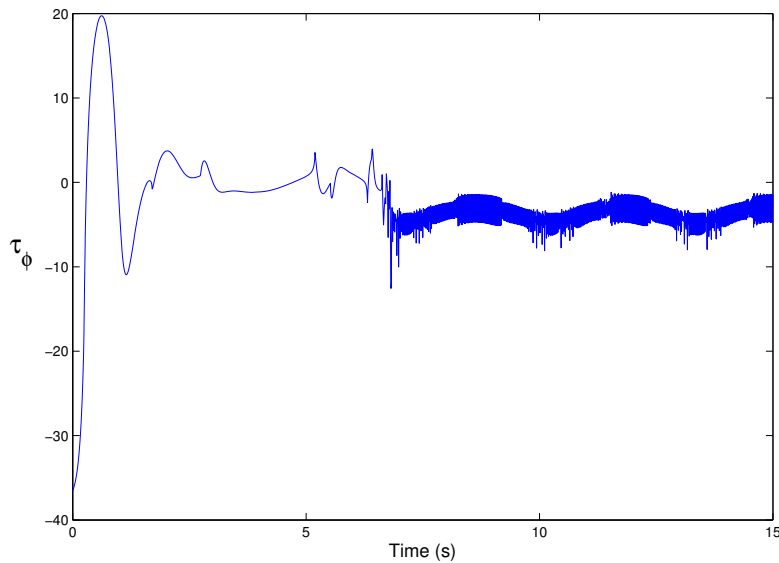


Figura 5.5.6: Esfuerzo de control

5.6. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

La metodología de los modos deslizantes se utiliza comúnmente para estabilizar los vehículos aéreos no tripulados, sin embargo, solo unos pocos han sido probados en tiempo real. Nuestro enfoque se validó en un vehículo cuadricóptero para estabilizar la dinámica del ángulo yaw y para mostrar la viabilidad del esquema de control propuesto. Los principales resultados se presentan en las gráficas en tiempo real.

Prototipo

Nuestro prototipo consiste en un prototipo cuadricóptero, un sistema de navegación incorporado y una estación terrestre. El vehículo está basado en una estructura Mikrokopter y tiene cuatro motores sin escobillas controlados por controladores i2c BICtrl. La masa total del prototipo es 1100G. La electrónica a bordo está equipada con un tablero IGEPv2 con un procesador ARM CortexA8 corriendo a 720 Mhz y un procesador de señal digital (DSP) C64x + funcionando a 520Mhz. Además, el cuadricóptero está equipado con una unidad de medición inercial (IMU) 3DMGX3-25, un telémetro ultrasónico y una cámara PS3Eye.

Toda la información recogida por el microprocesador es enviado a una estación de tierra mediante una conexión Wi-Fi gratuita. Su objetivo es representar gráficamente los estados para supervisar las respuestas del sistema, ajustar los parámetros de control y de redefinir las tareas o misiones, todo ello en tiempo real. Para las fases del manual de vuelo se utiliza una palanca de mando de Playstation 3. La estación de tierra y de la palanca de mando se conectan mediante comunicación Bluetooth, más detalles sobre la plataforma ver Sanahuja [66].

Resultados ángulo Yaw

Con el fin de validar en las pruebas en tiempo real del sistema propuesto, se realizaron algunos experimentos. El objetivo era práctico para estabilizar el ángulo yaw en una posición deseada y posteriormente cambiar a otro valor deseado. El procedimiento anterior se realizó cuando el vehículo aéreo no estaba en vuelo estacionario. Los parámetros de ganancia estaban sintonizados en la siguiente forma; primero se utilizaron los valores obtenidos en la simulación. Después analizado el rendimiento con estos valores, los parámetros fueron reajustados para mejorar el comportamiento. Se observó un buen comportamiento en la respuesta de los estados en el experimento, véase la figura (5.6.1). Los valores deseados se cambiaron en línea, se aprecia en esta figura la suave respuesta de los estados. Observe también que no hay oscilaciones mayores para alcanzar los valores deseados, de la figura (5.6.2) podemos observar que incluso si la entrada de control presenta oscilaciones, éstas no se presentan en las respuestas de los estados.

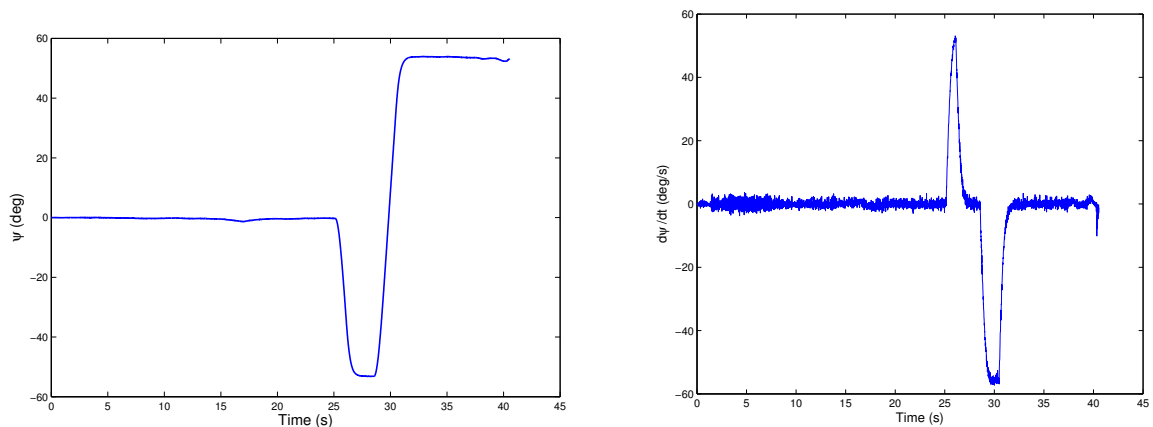


Figura 5.6.1: Respuesta de los estados

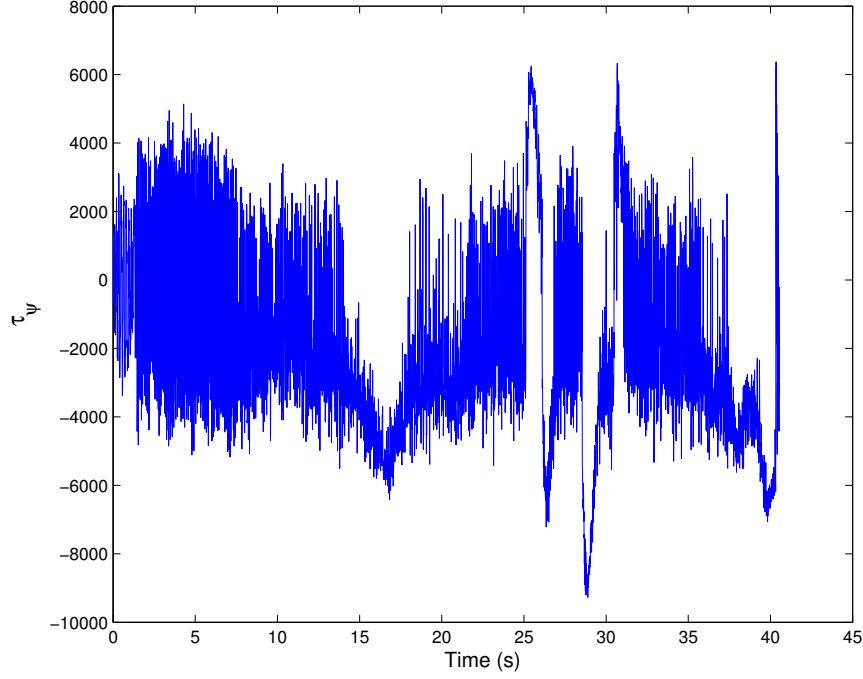


Figura 5.6.2: Esfuerzo de Control

5.7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Un controlador no lineal basado en la técnica de los modos deslizantes de alto orden fue presentada para estabilizar la dinámica lateral (y longitudinal) así como la dinámica del ángulo yaw de un vehículo aéreo cuadricóptero. Para proponer el controlador se tomo en cuenta un modelo lineal obtenido a partir de las ecuaciones no lineales simplificadas del vehículo cuadricóptero. El controlador propuesto es robusto con respecto a perturbaciones desconocidas e incertidumbres externas en el modelo. El esquema de control propuesto fue validado en la simulación y pruebas experimentales que se llevaron a cabo para estabilizar el ángulo yaw del vehículo. Los resultados de la simulación y prácticos nos motivan para ampliar los resultados de esta manera.

El trabajo futuro incluye la validación en tiempo real del controlador propuesto para estabilizar la dinámica longitudinal y lateral. Además, algoritmos de seguimiento de trayectoria se prevén para aplicarles el uso de esta metodología de control.

Capítulo 6

CONTROL DEL HOVERCRAFT

6.1. INTRODUCCIÓN

El hovercraft es un sistema sobre actuado que se desplaza sobre la superficie del agua. Éste posee 3 grados de libertad y solo 2 entradas de control, está compuesto por dos ventiladores que producen una cierta fuerza y un torque

6.2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Ley de newton

Consideramos la clase de vehículos sobre actuados descritos por el siguiente modelo general

$$M\dot{v} + C(v)v + D(v)v + g(\eta) = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.1)$$

$$\dot{\eta} = J(\eta)v \quad (6.2.2)$$

donde $\eta \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}^m$, $m < n$. Las matrices M y J son no singulares y $\dot{M} = 0$, esta clase de sistemas incluye superficies de vessel sobre actuadas, vehículos acuáticos, aeroplanos y aeronaves, el vector v denota la velocidad lineal y angular en un marco inercial fijo, y τ denota las fuerzas de control y torcas descompuestas en el marco inercial fijo. M es la matriz de inercia $C(v)$ contiene la matriz de Coriolis y centrípeta, $D(v)$ es la matriz de amortiguamiento y $g(\eta)$ es el vector de fuerza gravitacional o posiblemente fuerzas boyantes y torcaz. las ecuaciones 6.2.1 y 6.2.2 representan la dinámica y la cinemática respectivamente.

Usando el modelo previo (6.2.1) y (6.2.2) una superficie veseel que tiene principalmente dos hélices es descrito por el siguiente modelo.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f(v, r) \\ 0 & 0 & m_{11}u \\ f(v, r) & m_{11}u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_u & 0 & 0 \\ 0 & -Y_u & -Y_r \\ 0 & -N_v & -N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} \quad (6.2.4)$$

donde $f(v, r) = m_{23}r + m_{22}v$ las matrices $M, C(v), D$ y $J(\eta)$ de acuerdo a (6.2.1) - (6.2.2). M y D son ambas constantes, matrices definidas positivas. El vector $v = [u, v, r]^T$, denota las velocidades lineales en aumento, balanceo y la velocidad angular del ángulo yaw respectivamente. $n = [x, y, \psi]^T$ es la posición y el vector de orientación y $\tau = [\tau_u, 0, \tau_r]^T$ denota las fuerzas de control del oleaje y el torque de control en el ángulo yaw respectivamente.

El modelo no lineal para un hovercraft sobre actuado es obtenido mediante la simplificación del modelo de la superficie de vessel presentado arriba. Hemos despreciado el amortiguamiento, considerando que la forma del hovercraft es un disco y que las hélices están localizadas en el centro de masa. Para poder obtener un modelo simple capturamos las no linealidades más esenciales del hovercraft, asumimos que la matriz de inercial M es diagonal y ser idénticamente igual a la matriz identidad. por otra parte, cancelamos el amortiguamiento hidrodinámico, el cual no es esencial en el control del sistema. Entonces las ecuaciones dinámicas son dadas por

$$\begin{aligned}\dot{u} &= vr + \tau_u \\ \dot{v} &= -ur \\ \dot{r} &= \tau_r\end{aligned}\tag{6.2.5}$$

donde τ_u es la fuerza de control del oleaje y τ_r es el torque de control en yaw. En la segunda ecuación del sistema 6.2.5 el término derecho representa fuerzas de Coriolis y centrípetas.

usando los mismos supuestos como en la sección anterior, la función Lagrangiana para el sistema descrito en la figura 1 está dada por:

Ecuación de Euler Lagrange

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2\tag{6.2.6}$$

Las ecuaciones correspondientes de movimiento son derivadas usando ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = \tau\tag{6.2.7}$$

donde $q = [x, y, \Psi]^T$ y $\tau = [\tau_u \cos \Psi, \tau_u \sin \Psi, \tau_r]^T$. De las ecuaciones de Euler Lagrange tenemos por tanto que:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \tau_u \cos \Psi \\ \ddot{y} &= \tau_u \sin \Psi \\ \ddot{\Psi} &= \tau_r\end{aligned}$$

Permitamonos renombrar la cinemática de (6.2.4) como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \Psi - v \sin \Psi \\ \dot{y} &= u \sin \Psi + v \cos \Psi \\ \dot{\Psi} &= r\end{aligned}\tag{6.2.8}$$

Diferenciando las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\ddot{x} = -ur \sin \Psi + \dot{u} \cos \Psi - vr \cos \Psi - \dot{v} \sin \Psi\tag{6.2.9}$$

$$\ddot{y} = ur \cos \Psi + \dot{u} \sin \Psi - vr \sin \Psi + \dot{v} \cos \Psi \quad (6.2.10)$$

$$\ddot{\Psi} = \tau_r \quad (6.2.11)$$

Multiplicando (6.2.9) por $\cos \Psi$ y (6.2.10) por $\sin \Psi$ y sumando estas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \ddot{x} \cos \Psi + \ddot{y} \sin \Psi + vr \\ \dot{u} &= \tau_u + vr \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Multiplicando (6.2.9) por $\sin \Psi$ y (6.2.10) por $\cos \Psi$ y sumando estas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \ddot{y} \cos \Psi - \ddot{x} \sin \Psi + ur \\ \dot{v} &= -ur \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Finalmente obtenemos las ecuaciones dinámicas (6.2.5)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vr + \tau_u \\ \dot{v} &= -ur \\ \dot{r} &= \tau_r \end{aligned}$$

En lo siguiente consideraremos el problema de controlar la posición, no el ángulo yaw ψ y así rechazar la última ecuación en (6.2.8). Con el fin de obtener ecuaciones polinómicas más simples y eliminar ψ , usamos la siguiente transformación de coordenadas, el cual es un difeomorfismo global

$$\begin{aligned} z_1 &= x \cos \Psi + y \sin \Psi \\ z_2 &= -x \sin \Psi + y \cos \Psi \\ z_3 &= \Psi \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Diferenciando la ecuación anterior y usando (6.2.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u + rz_2 \\ \dot{z}_2 &= v - rz_1 \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

El modelo resultante, incluyendo las cinemáticas y las dinámicas, está finalmente dado por

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vr + \tau_u \\ \dot{v} &= -ur \\ \dot{r} &= \tau_r \\ \dot{z}_1 &= u + rz_2 \\ \dot{z}_2 &= v - rz_1 \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Tenemos entonces que las expresiones útiles que fueron utilizadas para obtener el sistema no lineal de ecuaciones (6.2.16) están dadas por

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -ur \sin \Psi + \dot{u} \cos \Psi - vr \cos \Psi - \dot{v} \sin \Psi & \dot{x} &= u \cos \Psi - v \sin \Psi & z_1 &= x \cos \Psi + y \sin \Psi \\
\ddot{y} &= ur \cos \Psi + \dot{u} \sin \Psi - vr \sin \Psi + \dot{v} \cos \Psi & \dot{y} &= u \sin \Psi + v \cos \Psi & z_2 &= -x \sin \Psi + y \cos \Psi \\
\ddot{\Psi} &= \tau_r & \dot{\Psi} &= r & z_3 &= \Psi
\end{aligned}$$

Primeramente dado que el torque de control τ_r del ángulo yaw Ψ será la encargada de dar estabilidad a la solución de ψ hacia alguna referencia deseada Ψ_d nos enfocaremos primero en controlar el ángulo Ψ , para hacer esto supondremos una superficie deslizante es de la forma

$$\sigma_1 = \exp(\Psi - \Psi_d) - 1 \quad (6.2.17)$$

$$\text{donde } \Psi_d = a_1 \cos(\omega_1 t)$$

Observación 11. notemos que cuando $\omega_1 = 0$ la referencia $\omega_1 = a_1 = \text{constante}$, y cuando $\omega_1 \neq 0$ la referencia Ψ_d oscilará y tendrá una amplitud máxima de a_1 . la meta es ahora hacer que el torque de control τ_r haga que σ_1 en (6.2.17) converja a cero, entonces se tendrá que $\Psi \rightarrow \Psi_d$. Lo anterior es fácil de mostrar ya que si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (\exp(\Psi - \Psi_d) - 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\Psi - \Psi_d) - 1 = 0$$

$$\text{Entonces } \Psi \rightarrow \Psi_d \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ ya que } \exp(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

y de la misma manera ocurrirá si σ_1 converge a cero en tiempo finito t_r pero en esta ocasión $\Psi \rightarrow \Psi_d$ para algún $t = t_r$.

Dicho todo lo anterior comenzaremos a encontrar τ_r entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \exp(\Psi - \Psi_d) - 1 \\
\dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 = \left(\dot{\Psi} + a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) \right) \exp(\Psi - \Psi_d) = (r + a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t)) (\sigma_1 + 1) \\
\dot{\sigma}_2 &= (\tau_r + a_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t)) (\sigma_1 + 1) + (r + a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t))^2 (\sigma_1 + 1) \\
\dot{\sigma}_2 &= [(\tau_r + a_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t)) + (r + a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t))^2] (\sigma_1 + 1)
\end{aligned} \quad (6.2.18)$$

y por consiguiente podemos reescribir a (6.2.18) como un sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 \\
\dot{\sigma}_2 &= [(\tau_r + a_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t)) + (r + a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t))^2] (\sigma_1 + 1)
\end{aligned}$$

A continuación mediante un problema de minimización cuadrática donde el funcional de costo este dado por

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (q \sigma_1^2 + r \sigma_2^2) dt \quad (6.2.19)$$

donde (6.2.19) está sujeta a

$$\dot{\sigma}_1 = 0 \sigma_1 + \sigma_2$$

$$A = 0, B = 1, q > 0, r > 0$$

se puede decir que σ_2 es un control virtual de tal manera que está dado por

$$\sigma_2 = -r^{-1}P\sigma_1$$

donde P es solución de la ecuación escalar:

$$P^2 r^{-1} - q = 0$$

y para minimizar (6.2.19) P es definida positiva la cual está dada por $P = \sqrt{qr} > 0$.

Por consiguiente tenemos que la superficie óptima está dada por:

$$\sigma_2 + K\sigma_1 = 0, \text{ con } K = \sqrt{q/r}$$

Donde bastará que $K > 0$.

Entonces ahora supongamos una superficie auxiliar S dada por

$$S = \sigma_2 + K\sigma_1 \quad (6.2.20)$$

derivando a (6.2.20) y basándonos en (6.2.18) tenemos que:

$$\dot{S} = \left[(\tau_r + a_1\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)) + (r + a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t))^2 \right] (\sigma_1 + 1) + K\sigma_2 \quad (6.2.21)$$

por consiguiente puedo proponer que:

$$(\tau_r + a_1\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)) + (r + a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t))^2 = -\frac{1}{\sigma_1 + 1} \left[C_1 |S|^{1/2} \text{Sign}(S) + K\sigma_2 \right]$$

Por tanto

$$\tau_r = -\frac{1}{\sigma_1 + 1} \left[C_1 |S|^{1/2} \text{Sign}(S) + K\sigma_2 \right] - (\tau_r + a_1\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)) + (r + a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t))^2$$

y observemos que τ_r está bien definida ya que $\sigma_1 + 1 = \exp(\Psi - \Psi_d)$, y el exponencial nunca es cero, por lo que no puede haber singularidades. Ahora sustituyendo τ_r en (6.2.21) tendremos que:

$$\dot{S} = -C_1 |S|^{1/2} \text{Sign}(S)$$

y se puede mostrar mediante una función de Lyapunov $V = |S|$ que $S = 0$ en un tiempo finito dado por $t_r = 2|S(0)|^{1/2}/C_1$.

Notemos que una vez que S converge a cero tenemos que $\sigma_1 = \sigma_2 \rightarrow 0$ pero en forma asintótica.

Por tanto

$$\Psi \rightarrow \Psi_d \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

A continuación encontremos el control τ_u que lleve a u hacia una referencia deseada u_d . Entonces proponemos la siguiente superficie deslizante dada por:

$$\sigma_3 = \exp(u - u_d) - 1$$

$$u_d = a_2 \cos(\omega_2 t)$$

si derivamos a σ_3 con respecto al tiempo tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_3 &= (\dot{u} + a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t)) \exp(u - u_d) \\ \dot{\sigma}_3 &= (vr + \tau_u + a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t)) (\sigma_3 + 1)\end{aligned}\tag{6.2.22}$$

puedo proponer en (6.2.22) que el término que multiplica a $\sigma_3 + 1$ está dado por:

$$vr + \tau_u + a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t) = -\frac{C_2}{\sigma_3 + 1} \left(|\sigma_3|^{1/2} \text{sign}(\sigma_3) \right)$$

y entonces se tendrá que

$$\tau_u = -vr - a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t) - \frac{C_2}{\sigma_3 + 1} \left(|\sigma_3|^{1/2} \text{sign}(\sigma_3) \right)$$

donde τ_u está bien definida ya que $\sigma_3 + 1$ nunca es cero, y por consiguiente no puede haber singularidades. sustituyendo a τ_u en (6.2.22) tenemos

$$\dot{\sigma}_3 = -C_2 |\sigma_3|^{1/2} \text{Sign}(\sigma_3)$$

y puede mostrarse que con una función de Lyapunov dada por $V = |\sigma_3|$ que $\sigma_3 \rightarrow 0$ en tiempo finito $\tau_r = 2|\sigma_3(0)|^{1/2}/C_2$.

A continuación se mostrará las simulaciones de Ψ , u , v y el desplazamiento dado por el hovercraft es decir $(z_1, z_2)^T$ así como los controladores τ_r y τ_u , donde (6.2.16) tendrá condiciones iniciales dadas por $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $r(0) = 0$, $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 0$ con referencias propuestas como $\Psi_d = 3\cos(0.1t)$, $u_d = 0.45\cos(0.1t)$, y las ganancias para el controlador τ_r son $C_1 = 4$, $K = 10$, y para τ_u la ganancia esta dada por $C_2 = 4$.

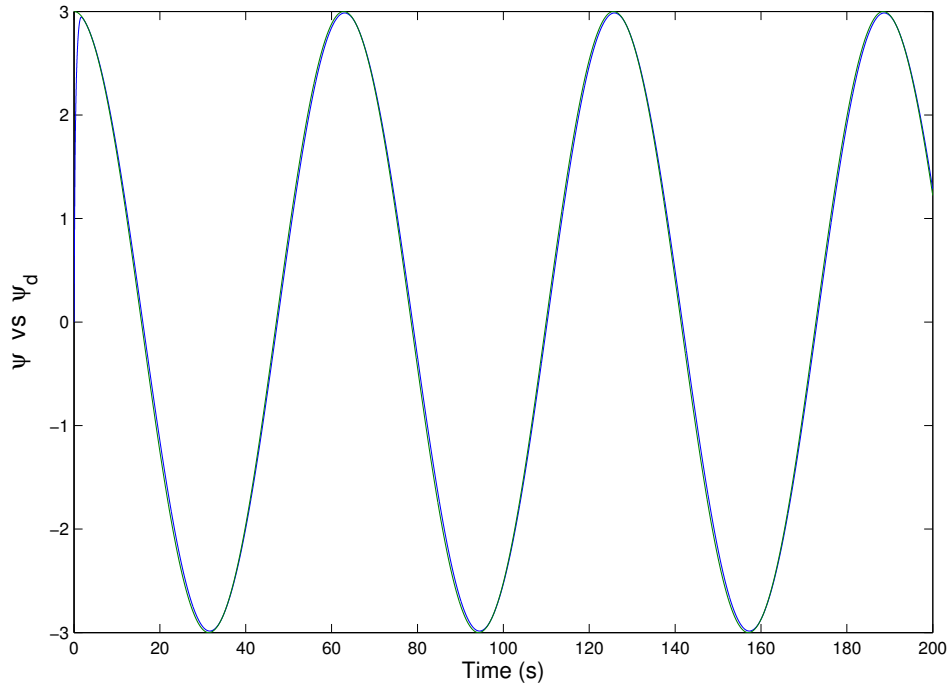


Figura 6.2.1: Ψ y Ψ_d

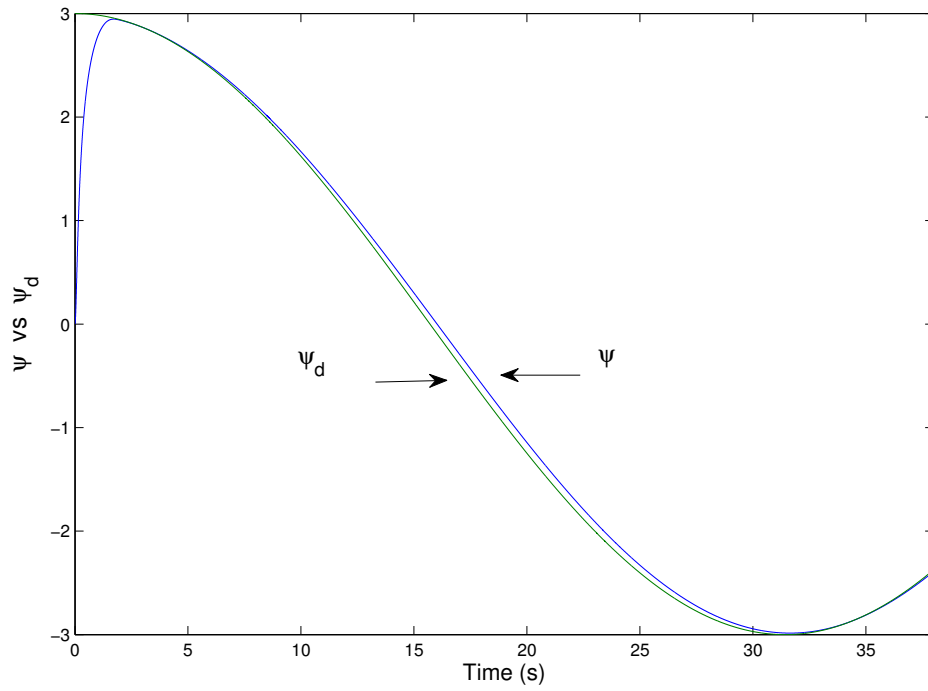


Figura 6.2.2: zoom de Ψ y Ψ_d

En figura (6.2.1) se muestra la dinámica del ángulo yaw Ψ alcanzando su referencia deseada Ψ_d , y en figura (6.2.2) se muestra la misma gráfica con zoom del ángulo Ψ alcanzando su referencia Ψ , donde se aprecia la convergencia a la referencia deseada Ψ_d de forma asintótica.

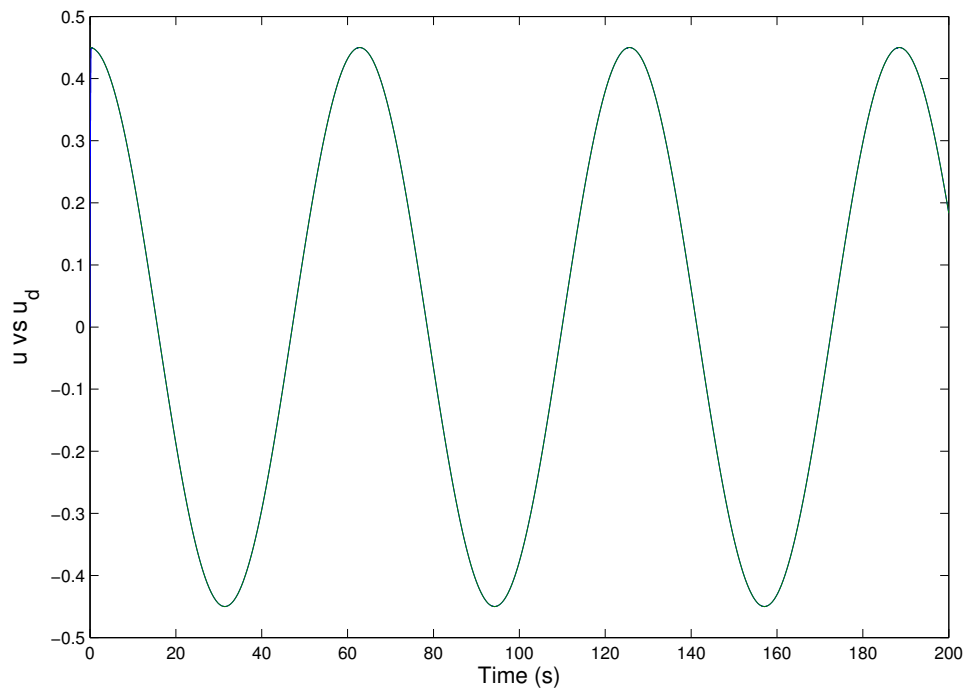


Figura 6.2.3: u y u_d

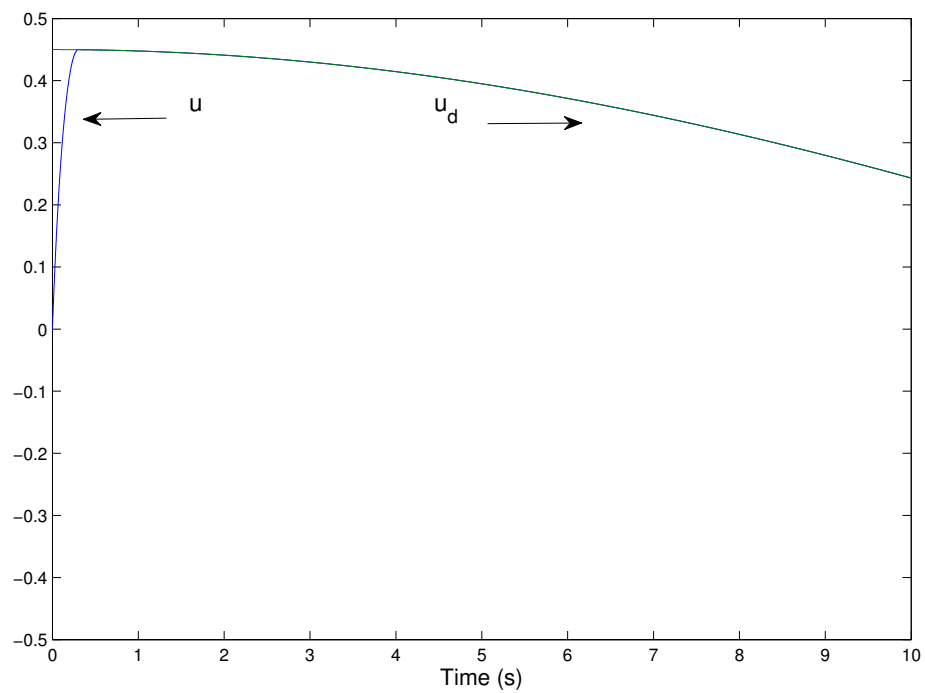


Figura 6.2.4: zoom de u y u_d

En la figura (6.2.3) y

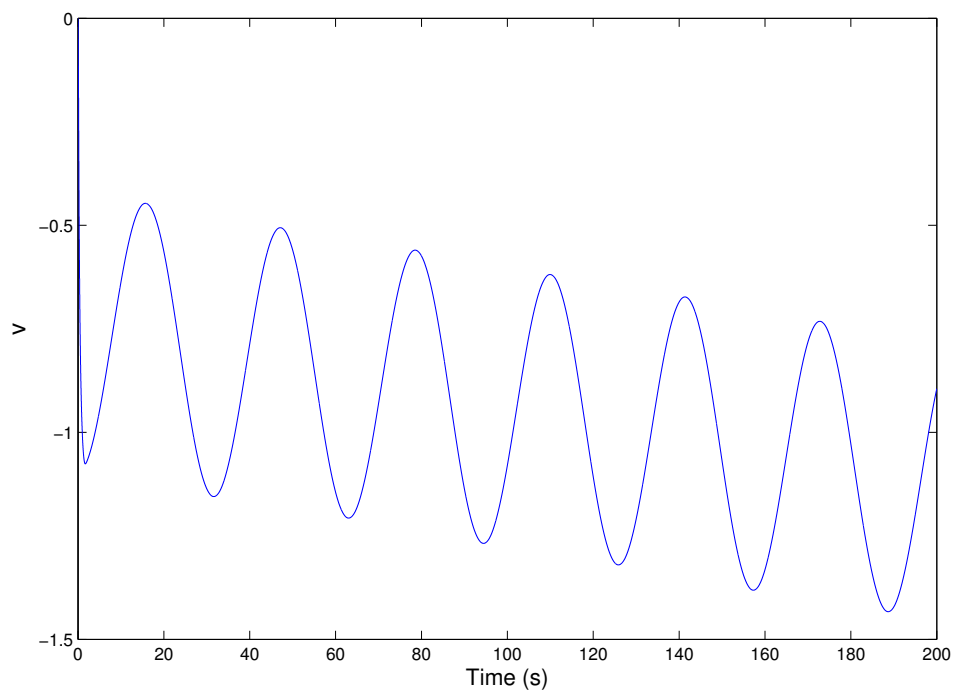


Figura 6.2.5: v

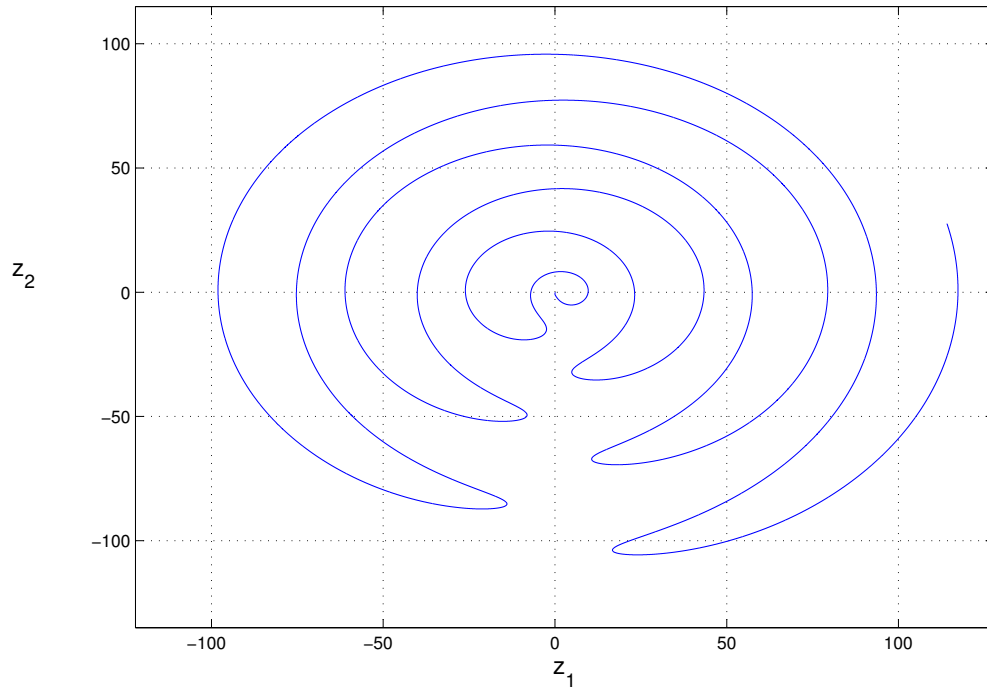


Figura 6.2.6: Posición del Hovercraft

En figura (6.2.6) observamos la posición del hovercraft, donde inicialmente parte del reposo desde el origen y empieza a describir un movimiento hacia afuera en forma de tipo espiral.

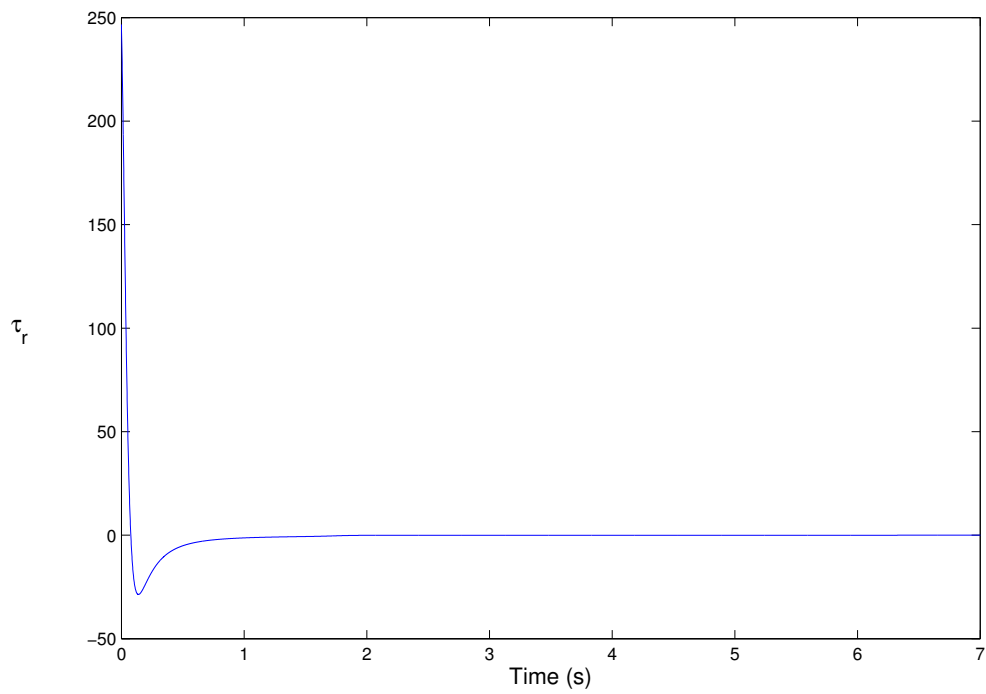


Figura 6.2.7: τ_r

En figura (6.2.7) se muestra el torque de control en yaw Ψ

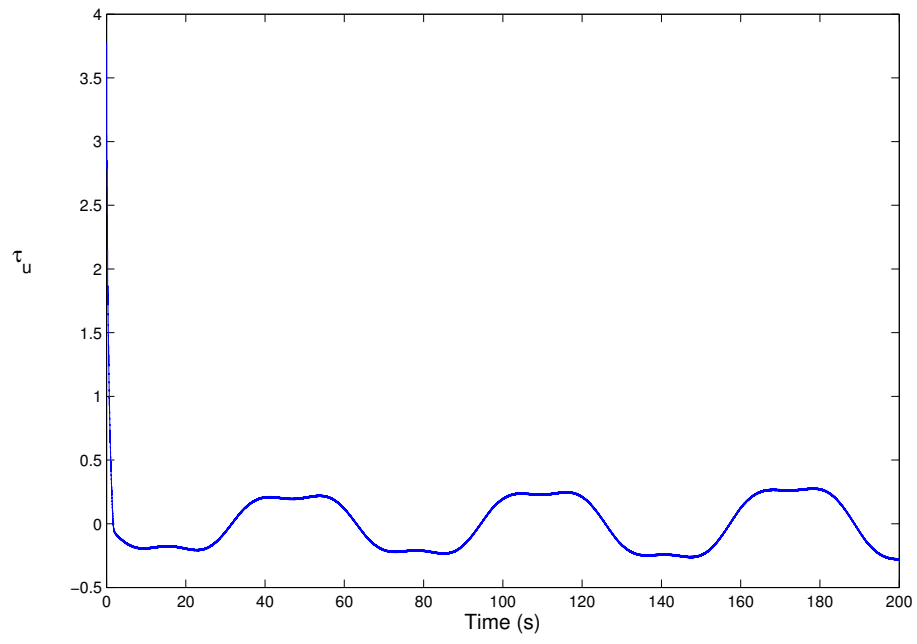


Figura 6.2.8: τ_u

En figura (6.2.8) se muestra la fuerza de control del oleaje

Capítulo 7

CONCLUSIÓN Y TRABAJO FUTURO

7.1. CONCLUSIÓN

En la teoría y práctica la implementación de la teoría de los modos deslizantes es bien recibida por los ingenieros, debido a que los controladores con lado derecho discontinuo, han resultado ser de gran utilidad para brindar estabilidad a sistemas lineales donde se pudiera presentar algún tipo de perturbación o fuerza desconocida, con el único conocimiento de que estas incertidumbres están acotadas, donde la robustez se debe principalmente a que el diseño de estos controladores está basado al considerar una función de Lyapunov, candidata y adecuada que nos proporcione las condiciones de estabilidad ante perturbaciones acotadas que pueden presentarse en alguna implementación de tiempo real. Además puede decirse que esta tesis proporciona metodologías de control robusto, gracias a que la combinación de los controladores quasicontinuos de alto orden y al enfoque de optimización es que se logró extender el diseño de superficies deslizantes de primer orden a las denominadas superficies de alto orden, necesariamnete requeridas si se desea proveer de estabilidad a los sistemas lineales que se desean controlar.

7.2. TRABAJO FUTURO

Se plantea dar solución a problemas de estabilización singular óptima para sistemas no lineales de la forma $\dot{x} = f(x) + b(x)u$ considerando el enfoque de optimización, además también se piensa resolver problemas de estabilización para sistemas MIMO con la utilización de la teoría de los modos deslizantes en conjunción con el enfoque de optimización, resolviendo el problema del regulador lineal cuadrático en costos cuadráticos singulares de orden alto.

7.3. ARTÍCULOS

I Castillo, M. Jiménez-Lizárraga and E. Ibarra, “HOSM Manifold Design via Singular LQ Control” *Journal of the Franklin Institute* (aceptado en impresión)

M. Jiménez-Lizárraga, E. Ibarra “High order sliding mode optimization linear time-variant case” *Optimal Control Applications and Methods* (sometido)

7.4. CONFERENCIAS

Rene Galindo, Efraín Ibarra and Manuel Jiménez-Lizárraga “Comparative Study of the Speed Robust Control of a DC Motor” *Proceedings of the World Automation Congress*, 2012 WAC.

L. Fridman, M. Jimenez-Lizárraga and E. Ibarra “Integral Higher Order Sliding Mode and Singular Optimal Stabilizatiion” *Proceedings of the European Control Conference* 2013. Zurich Suiza 2013.

P. Castillo, E. Ibarra and M. Jiménez-Lizárraga “A HOSM control algorithm to stabilize the cuadricóptero vehicle with experimental validation” RED UAS 2013.

M. Jiménez-Lizárraga and E. Ibarra “Robust High Order Sliding Mode Optimization for Linear Time Variant Systems” 19thIFAC World Congress 2014.

M. Jiménez-Lizárraga and E. Ibarra “High Order Optimization For Linear Systems: Probe Landing Application” International Conference on Engineering and Applied Science Optimization Kos Island Greece, 2014.

Bibliografía

- [1] Amato, F. (2006). *“Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters”*. Springer.
- [2] Anderson and Moore, J. (1989). *Optimal Control*. Prentice- Hall, Englewood Cliff, NY.
- [3] Angulo, M., Fridman, L., and Levant, A. (2012). Output-feedback finite-time stabilization of disturbed lti systems. *Automatica*, 48(4), pp. 606– 611.
- [4] APKARIAN, P. and GAHINET, P. (1995). A convex characterization of gain sheduled \mathcal{H}_∞ controllers. *IEEE Transaction on Automatic Control (TAC)*, vol. 40, pp. 853– 864.
- [5] Bartolini, G., Orani, N., Pisano, A., Punta, E., and Usai, E. (2007). A combined first- second order sliding- mode technique in control of a jet propelled vehicle. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(4/5), pp. 570–585.
- [6] Bartolini, G. and Pisano, A. (2003). “global output-feedback tracking and load disturbance rejection for electrically-driven robotic manipulators with uncertain dynamics. *International Journal of Control*, 76(12), pp. 1201–1213.
- [7] Basin, M., Fridman, L., and Rodriguez, J. (2002). Optimal and robust integral sliding mode filters over observations with delay. *Proceedings of the IEEE 7th International Workshop on Variable Structure Systems, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina*, pp. 163–174.
- [8] Basin, M., Rodriguez, J., Fridman, L., and Acosta, P. (2005). Integral sliding mode design for robust filtering and control of linear stochastic time-delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, (15), pp. 407–421.
- [9] Bell, J. and Jacobson, D. (1975). Singular optimal control problems. *Academic Press, London*.
- [10] Bhatti, A. (1998). *Advanced Sliding Mode Controllers for Industrial Applications, PhD thesis*. University of Leicester.
- [11] Boltyanski, V. and Poznyak, A.S. (2012). *The Robust Maximum Principle*. Birkhauser.
- [12] Castanos, F. and Fridman, L. (2006). Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Trans. Automat. Contr*, 55(5), pp. 853–858.
- [13] Chen, C. (1984). *Linear System Theory and Design*. CBS College Pub.
- [14] Corless, M. (1994). Robust stability analysis and controller design with quadratic lyapunov functions, in zinober, a.s.i., variable structure and lyapunov control. pp. 181–203.
- [15] Davies, R. and Spurgeon, S. (1993). Robust tracking of uncertain systems via a quadratic stability condition. *Procedings of the 12th IFAC world Congress*, pp. 10: 43–46.
- [16] Desoer, C., Liu, R., Murray, J., and Sacks, R. (1980). “feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis”. *IEEE Trans. on Autom. Control*, pp. 399–412.
- [17] Dmitriev, M. and Kurina, G. (2006). “singular perturbations in control problems,”. *Automation and Remote Control*,, vol. 67, pp. 3–51.
- [18] Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. London. Taylor and Francis.

- [19] Erzberger, H. (1968). Analysis and design of model-following control systems by state space techniques. *Proceedings of the Joint American Control Conference*, pp. 572–581.
- [20] Faulkner, F. (1957). *The problem of Goddard and optimum thrust programming*, volume I. Plenum press.
- [21] Filippov, A. (1983). *Differential equations with discontinuous right hand-slides, Mathematics and its applications*. Kluwer Academic Publisher.
- [22] Freguela, L., Fridman, L., and Alexandrov, V. (2012). Output integral sliding mode control stabilize position a stewart platform. *Journal of Franklin Institute*, 349(4), pp. 1526–1542.
- [23] Fridman, L., Jimenez-Lizarraga, M., and Ibarra, E. (2013). Integral higher sliding mode and singular optimal stabilization. *In proceedings of the European Control Conference*.
- [24] Fridman, L. and Levant, A. (1996). Higher order sliding modes as the natural phenomena of control theory. in: Garafalo, f., glielmo, g. (eds.) robust control variable structure and lyapunov techniques. pp. 107– 133.
- [25] Gabasov, R. (1968). On the theory of necessary conditions for optimality of singular control. *Engng. Cybern.*, (5), pp. 28–37.
- [26] Gabasov, R. and Kirillova, F. (1972). “high order necessary conditions for optimality”. *SIAM J. on Control and Optimization*.
- [27] Galindo, R., Herrera, A., and Martínez, J. (2000). “methodology on low-order robust controllers. application to a tandem fan in a platform”. *American Control Conf*, pp. 909–913.
- [28] Galindo, R., Malabre, M., and Kučera, V. (2004). “ \mathcal{H}_∞ control for linear time invariant systems”.
- [29] Glad, S., Hermerson, A., and Ljung, L. (2001). Uncertain linear time invariant - models for linear control design of non - linear systems. *Proceedings of the 40 th IEEE conference on Volume 3*, vol. 3, pp 2692–2694.
- [30] Gu, G. (1990). Stabilizability conditions of multivariable uncertain systems via output feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35, pp. 925–927.
- [31] Ho, Y. (1972). “linear stochastic singular control problems”. *J. Optim. Theory Appl*, vol. 9(1), pp. 24–31.
- [32] Isidori, A. (1995). *Nonlinear systems*. Springer-Verlag.
- [33] Johnson, C.D. and Gibson, J. (1963). "singular solutions in problems of optimal control". *IEEE Trans. Automat.Contr*, vol. 8, pp. 4–15.
- [34] Jonhnson, C. and Gibson, J. (1963). Singular solutions in problems of optimal control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 8, pp. 4–15.
- [35] Jordan, D. and Smith, P. (2007). *Nonlinear Ordinary Differential Equations: An introduction for scientists and Engineers*. OXFORD: UNIVERSITY PRESS, fourth edition.
- [36] Keel, L. and Bhattacharyya, S. (1997). “robust, fragile, or optimal?”. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, pp. 1098–1105.
- [37] Kelley, H.J. (1965). “a transformation approach to singular subarcs in optimal trayectory and control problems,”. *SIAM J. Control, Ser: A*, vol. 2(2), pp. 234–240.
- [38] Khalil, H. (1992). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ.
- [39] Kokotovic, P.V., O’ Malley, R.B., and Sannuti, P. (1976). Singular perturbations and order reduction in control theory. *Automatica*, vol. 12, pp. 23 –32.
- [40] Kučera, V. (1979). *Discrete linear control, The polynomial equation approach*. Wiley, Chichester.
- [41] Kwakernaak, H. and Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley, New York.
- [42] Lee, E. and Markus, L. (1967). *Foundations of Optimal Control Theory*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

- [43] Lee, J. and Bien, Z. (1987). A quadratic regulator with cheap control for a class of nonlinear systems". *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 55, pp. 289–302.
- [44] Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, vol. 58(6), pp. 1247–1263.
- [45] Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding modes technique. *Automatica*, pp. 379–384.
- [46] Levant, A. (2001). Universal siso sliding mode controllers with finite time convergence. *IEEE Trans. Automat. control*, 46(9), pp. 1447–1451.
- [47] Levant, A. (2003). High-order sliding modes: differentiation and output feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10), pp. 1924–1941.
- [48] Levant, A. (2006). “quasi-continuous high-order sliding-mode controllers”. *IEEE Trans. Automat. Contr*, vol. 50, pp. 1812–1886.
- [49] Levant, A. and Alelishvili, L. (2007). “integral high order sliding modes”. *IEEE Trans. Automat. Contr*, 7, pp. 1278–1282.
- [50] Levant, A. and Michael, A. (2008). “adjustment of high-order sliding-mode controllers,”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 19, pp. 1657–1672.
- [51] Lukyanov, A. and Utkin, V. (1982). “optimal linear systems with degenerated criterion”. *Automation and Remote Control*, (7), pp. 42–50.
- [52] Lukyanov, A. and Utkin, V. (1981). Methods for reducing equations for dynamic system to a regular form. *Automat. Rem. Contr*, vol. 4, pp. 14–18.
- [53] Moreno, J. and Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for the super-twisting. *IEEE Trans. Automat. Contr*, 57(4), pp. 1035–1040.
- [54] Moreno, J.A. (2011). *Lyapunov approach to analysis and design of second order sliding sliding mode algorithms*. In: Fridman, L., Moreno, J., Iriarte, R. (eds.) *Sliding Modes after the first Decade of the 21st Centy. Lecture Notes in Control and Information Science*, volume vol. 412. Springer, Berlin.
- [55] Munoz, L.E., Castillo, P., Sanahuja, G., and Santos, O. (IROS 2011). Embedded robust nonlinear control for a four-rotorcraft: Validation in real- time with wind disturbances. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*.
- [56] Peng, H. (1992). ‘*Vehicle lateral control for highway automation*’, *PhD dissertation*. University of California, Berkeley CA.
- [57] Pham, H., Hedrick, K., and Tomizuka, M. (1994). Combined lateral and longitudinal control of vehicles for ivhs. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1205–1206.
- [58] Pisano, A., Scodina, S., and Usai, E. (2010). Load swing suppression in the 3-dimensional overhead crane via second-order sliding-modes. *The 11th International Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 452–457.
- [59] Pisano, A. and Usai, E. (2004). Output-feedback control of an underwater vehicle prototype by higher-order sliding modes. *Automatica*, 40(3), pp. 1525–1530.
- [60] Poznyak, A. (2008). *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*. Amsterdam: Elsevier.
- [61] Poznyak, A., Fridman, L., and Bejarano, F. (2009). Mini-max integral sliding mode control for multimodel linear uncertain systems. *IEEE Trans. Automat. Contr*, 54(8), pp. 1951–1955.
- [62] Poznyak, A., Shtessel, Y., and Jimenez, C. (2003). “min-max sliding-mode control for multimodel linear time varying systems”. *IEEE Trans. Automat. Contr*, vol. 48, pp. 2141–2150.
- [63] Ramaswami, B. and Ramar, K. (1969). On the transformation of time- variable systems to the phase - variable canonical form. *IEEE trans. Automat. Contr*, 44, pp. 417–419.
- [64] Ross, S. (1958). “minimality for problems in vertical and horizontal rocket flight”. *Jet Propulsion*, Vol. 28, pp. 55–56.

- [65] Saberi, A. and Sannuti, P. (1985). “time-scale decomposition of a class of linear and nonlinear cheap control problems,”. pp 1414–1421.
- [66] Sanahuja, G. (2010). “ commande et localisation embarquée d’ un drone aérien en utilisant la vision”. *Université de Technologie de Compiègne, France*.
- [67] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser.
- [68] Shtessel, Y., Shkolnikov, I., and Levant, A. (2007). Smooth second order sliding modes; missile guidance. *Automatica*, 43(8), 1470–1476.
- [69] Slotine, J.E. (1984). Sliding controller design for nonlinear systems. *International Journal of Control*, (40), pp. 421–434.
- [70] Spurgeon, S. and Davies, R.A. (1993). nonlinear control strategy for robust sliding mode performance in the presence of unmatched uncertainty. *International Journal of Control*, vol. 57, pp. 1107–1123,.
- [71] Strang, G. (1988). *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, London.
- [72] Sung Phill, K., Rao, Yadunantana, N., Erdogmus, D., and Principe, J.C. (2004). Tracking of multivariate time - variant systems based on online variable selection. *Proceedings of the (2004) 14th IEEE signal Processing Society Workshop*, pp. 123–132.
- [73] Utkin, V. (1991). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlang.
- [74] Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (1999). *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis.
- [75] Utkin, V. and Shi, J. (December 1996). Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan*.
- [76] Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. Massachusetts :The MIT Press Cambridge.
- [77] Wonham, W. (1979). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. New York, Springer-Verlag.
- [78] Xu, J., Pan, Y., Lee, T., and Fridman, L. (2005). On nonlinear \mathcal{H}_∞ sliding mode control for a class of nonlinear cascade systems. *International Journal of System Science*, 36(15), pp. 983–992.
- [79] Youla, D.C., Jabr, H.A., and Bongiorno, J.J. (1976). “modern wiener-hopf design of optimal controllers - part ii: The multivariable case”. *TAC*, pp. 319–338.
- [80] Young, K., Utkin, V., and Ozguner, U. (1999). A control engineer’s guide to sliding mode control. *IEEE Trans. Contr. Syat. Tech*, 7(3), pp. 328–342.
- [81] Zhou, K., Khargonekar, P.P., Stoustrup, J., and Niemann, H.H. (1995). Robust performance of systems with structured uncertainties in state space. *Automatica*, 31(2), pp. 249–255.
- [82] Zubov, V.I. (1964). *Methods of A. M. Lyapunov and Their Applications*.